Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Омский государственный технический университет”

РЕШЕНИЕ ПОЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Методические указания

Омск
Издательство ОмГТУ
2008

Составители: Ляшков Алексей Ануфриевич, канд. техн. наук., доцент
Бурыгина Светлана Геннадиевна

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины «Начертательная геометрия» и содержат решения позиционных задач на взаимопринадлежность и взаимное пересечение различных геометрических объектов. Они предназначены как для самостоятельной работы, так и для работы на лабораторных занятиях для студентов специальностей 140610, 140211, 14010062, а также студентов механических специальностей.

Перед решением задач, указанных преподавателем, рекомендуется проработать теоретический материал по лекциям и учебнику, а затем разобрать пример решения задачи из соответствующей группы позиционных задач настоящих методических указаний.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

1. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ И ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ ПОВЕРХНОСТИ

1.1 Принадлежность точки прямой

Условие принадлежности точки прямой заключается в следующем: *точка принадлежит прямой, если ее проекции принадлежат одноименным проекциям прямой.*

Пример. Дана прямая m и проекции точек A, B и C (рис. 1). Установить принадлежность точек прямой.

Решение. Из рис. 1 следует, что: $A \in m$, так как $A_1 \in m_1$ и $A_2 \in m_2$; $B \notin m$, так как $B_1 \in m_1$, но $B_2 \notin m_2$; $C \in m$, так как $C_1 \notin m_1$, $C_2 \notin m_2$.

Примечание: Условие принадлежности точки линии формулируется аналогично, однако имеет и свою специфику.

1.2 Принадлежность точки плоскости.

Условие принадлежности: *точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.*

Тогда при построении недостающей проекции точки, принадлежащей плоскости, используем результаты задачи в п.1.1.

Пример. Дана плоскость Σ (a//b) и горизонтальная проекция точки $C(C_1)$ (рис.2), принадлежащей плоскости. Построить ее фронтальную проекцию.

Решение 1. На заданной плоскости вводим прямую MN так, чтобы ее горизонтальной проекции принадлежала точка $C(C_1)$ (см. п.1.1);

2. Строим фронтальную проекцию точки $C(C_2)$, принадлежащую прямой $MN(M_2N_2)$.

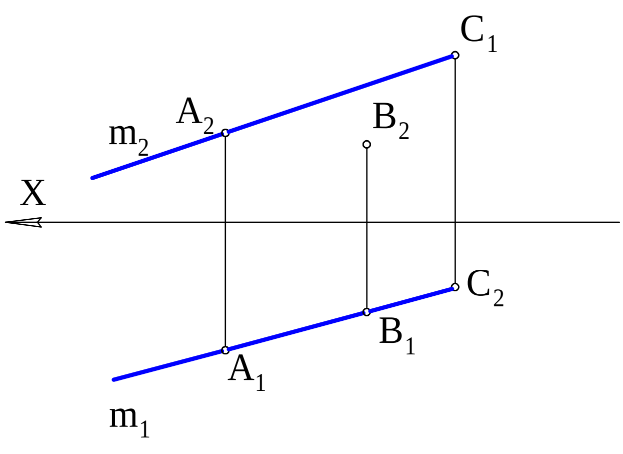


Рис. 1

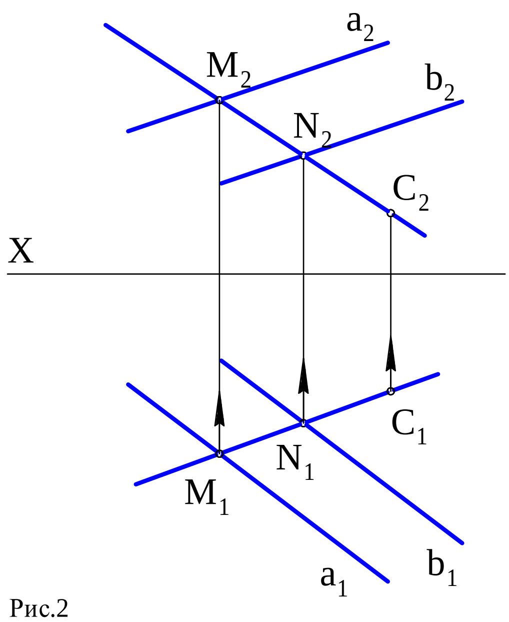


Рис.2

1.3 Принадлежность точки поверхности

Условие принадлежности точки поверхности: *точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии этой поверхности.* Тогда эта задача аналогична предыдущей и также основывается на принадлежности точки линии. При реализации ее на чертеже в качестве линии на поверхности, по возможности, следует выбирать графически простые линии или линии, которые проецируются в графически простые (прямые или окружности). Решение задачи проиллюстрируем примерами.

Пример 1. Даны поверхность вращения Δ (i, l) и проекции точек $A(A_2)$ и $B(B_2)$ – (проекции точек видимые) (рис. 3). Построить недостающие проекции точек $A(A_1)$ и $B(B_1)$, если известно, что они принадлежат поверхности.

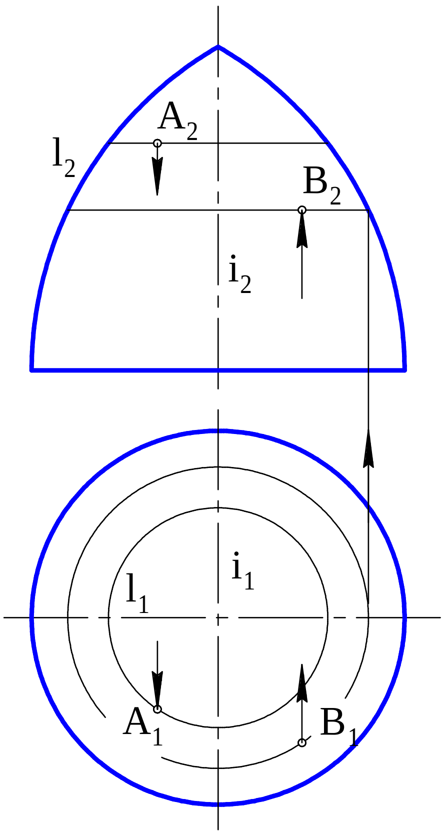


Рис.3

Решение. Исходная поверхность – поверхность вращения. Графически простыми линиями на ней являются окружности, которые на Π_1 проецируются без искажения, а на Π_2 – в отрезки прямых, перпендикулярных оси i (i_2).

Тогда имеем следующий алгоритм построения недостающих проекций точек:

1) проводим проекции окружностей, принадлежащих поверхности и проходящих через заданные проекции точек;

2) строим недостающие проекции точек из условия принадлежности их проекциям окружностей.

Пример 2. Даны линейчатые поверхности: коническая - Δ (S, m) и цилиндроид - Γ (a, b,Σ), а также проекции точек $A(A_1)$, $B(B_2)$, $C(C_1)$ и $D(D_2)$ (рис.4). Построить недостающие проекции точек, если известно, что точки A и B принадлежат поверхности Δ, а точки C и D – поверхности Γ.

Решение. Заданные поверхности – линейчатые. Это позволяет для решения задачи в качестве линий на поверхностях использовать прямые – образующие. Следовательно, алгоритм решения будет таким:

1) строим проекции образующих, проходящих через заданные проекции точек A (A_1), $B(B_2)$, $D(D_2)$.

2) определяем недостающие проекции образующих и на них проекции искомых точек.

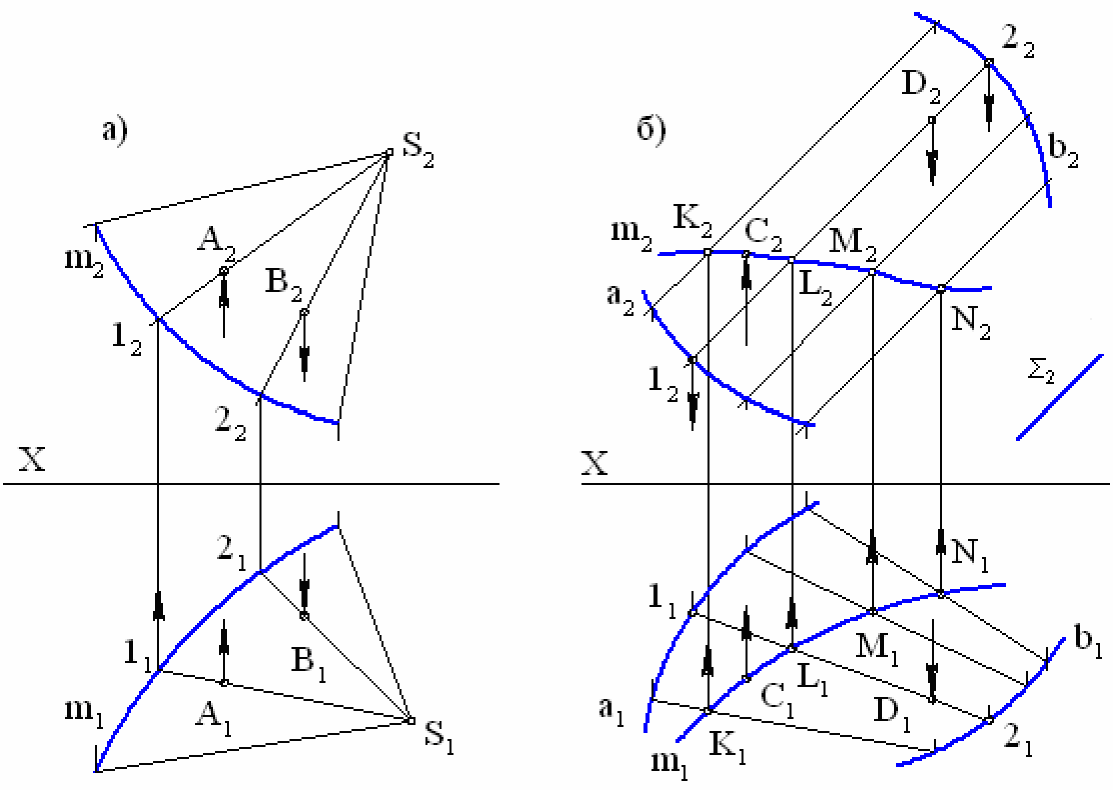


Рис.4

Иначе находится точка C_2. Так как при определении C_2 нельзя воспользоваться прямолинейными образующими, то: 1) через C_1 проводим произвольную проекцию m_1 линии m, принадлежащей поверхности; 2) строим фронтальную проекцию линии m(m_2) и на ней точку C_2.

Пример 3. Даны поверхность трехосного эллипсоида и фронтальная проекция точки A(A_2) (рис.5). Построить горизонтальную проекцию точки A(A_1), если известно, что она принадлежит поверхности (точка A(A_2) видимая).

Решение. На поверхности трехосного эллипсоида нет графически простых линий. Плоскими кривыми на этой поверхности являются эллипсы – лекальные кривые. Однако при определенном расположении относительно плоскости проекций эллипсы могут проецироваться в отрезки прямых линий окружности. Тогда для решения задачи:

а) построим на Π_1 окружность m_1, касающуюся очерка поверхности, с центром в точке пересечения осей этого очерка;

б) полагая, что в эту окружность проецируется эллипс m, принадлежащий заданной поверхности, найдем его фронтальную проекцию. На Π_2 эллипс проецируется в отрезок прямой и проходит через точки C(C_2) и D(D_2), принадлежащие поверхности. Тогда любой эллипс, принадлежащий поверхности и на Π_2 проецирующийся в отрезок, параллельный C_2D_2, на Π_1 также проецируется в окружность.

Действительно, исходную поверхность трехосного эллипсоида родственным преобразованием [6] можно преобразовать в сферу, на которой имеем семейство подобных окружностей, расположенных в параллельных плоскостях и соответствующих эллипсам трехосного эллипсоида. Так как при родственном преобразовании параллельность прямых и плоскостей сохраняется, то отношение диаметров в этих окружностях сферы будет равно отношению соответствующих диаметров эллипсов, а значит и их осей. Следовательно, эти эллипсы подобны и на Π_1 все они проецируются в окружности.

в) проводим на Π_2 через A_2 проекцию эллипса $n(n_2)$, принадлежащего поверхности, причем $n_2 // \Gamma_2$.

г) находим горизонтальную проекцию эллипса $n(n_1)$ (окружность) и на ней искомую проекцию точки $A(A_1)$.

Пример 4. Даны косая плоскость Г (a, b, Σ) и горизонтальная проекция точки $A(A_1)$ (рис. 6). Построить фронтальную проекцию точки $A(A_2)$, если известно, что она принадлежит поверхности.

Решение. Известно, что косая плоскость имеет два семейства прямолинейных образующих [2]. Образующие одного из них параллельны заданной плоскости Σ и пересекают направляющие a, b. Образующие другого семейства параллельны плоскости Σ^1, параллельной прямым a, b и пересекают направляющие, которыми являются образующие первого семейства.

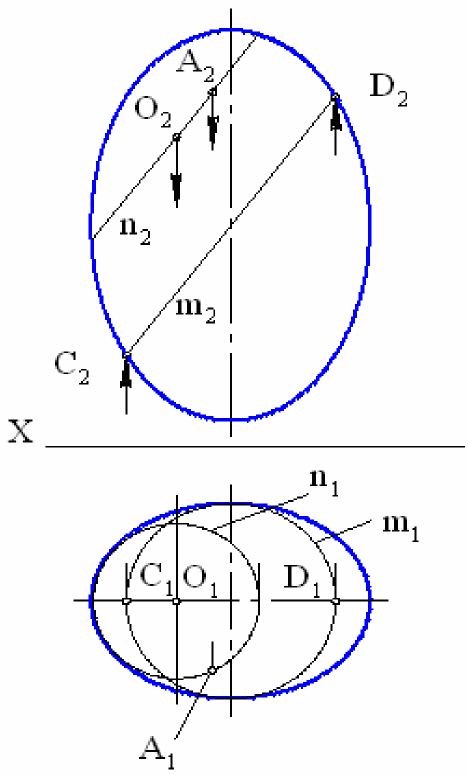


Рис. 5

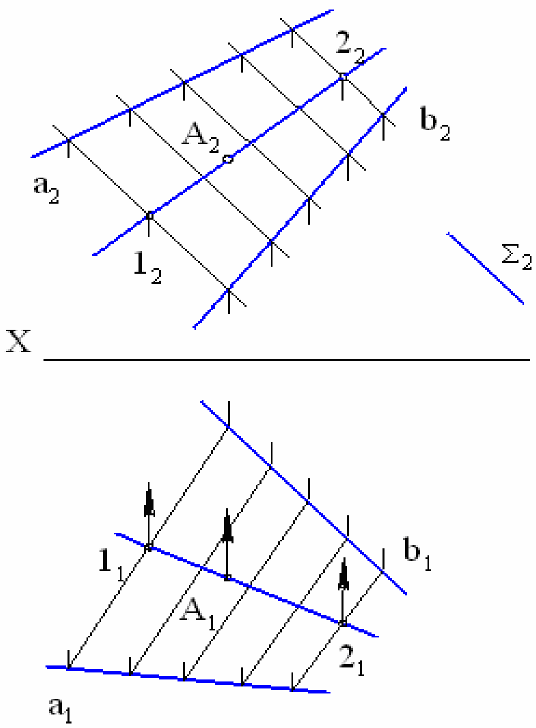


Рис. 6

Так как на $П_1$ проекции направляющих параллельны, с учетом отмеченного выше, имеем следующий алгоритм решения задачи:

а) проводим через A_1 на $П_1$ проекцию образующей $12(1_1 2_1)$, параллельной $a_1(b_1)$;

б) строим фронтальную проекцию образующей $12(1_1 2_1)$ и на ней находим проекцию A_2 искомой точки.

1.4 Принадлежность линии поверхности

Данная задача принципиально не отличается от задачи на принадлежность точки поверхности. При ее решении на заданной проекции линии выделяют конечное число точек, недостающие проекции которых и строят. Заметим лишь, что особенно внимательно нужно относиться к выбору этих точек. Так, в первую очередь следует построить характерные точки линии, к которым относят:

а) точки перемены видимости проекций линии, т.е. точки, задающие границы видимых и невидимых участков проекций линии относительно какой-либо плоскости проекций;

б) экстремумы проекций линии;

в) точки, удаленные на экстремальные расстояния от плоскостей проекций и т.п., а затем строят проекции других точек – промежуточных.

Пример. Даны коническая поверхность вращения и горизонтальная проекция линии $m(m_1)$, принадлежащей поверхности (рис.7). Построить недостающие проекции линии.

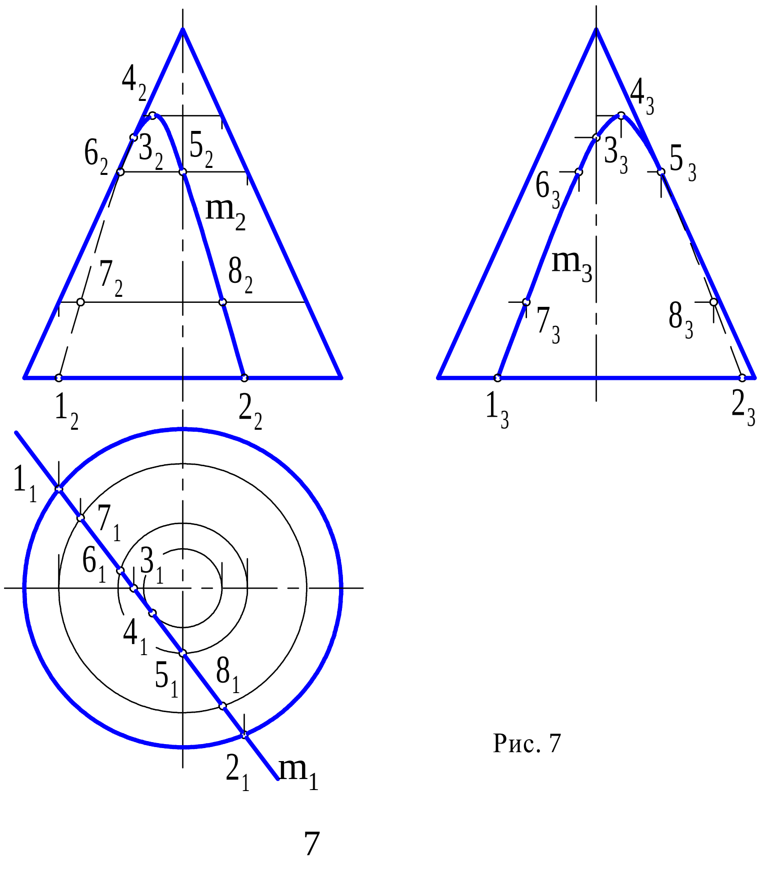


Рис. 7

Решение. На заданной поверхности можно выделить два семейства графически простых линий: окружности и прямолинейные образующие, которые и будут использованы для построения недостающих проекций точек.

Алгоритм решения:

1) на заданной линии выделяем характерные точки. К ним относятся точки 1, 2, 3, 4 и 5. Точки 1 и 2 лежат на основании отсека конической поверхности – граничные. Точки 3 и 5 принадлежат очерковым образующим поверхности – точки перемены видимости. Точка 4 – точка экстремума фронтальной и профильной проекций линии, она удалена на наибольшее расстояние от Π_1. Построения недостающих проекций точек 1, 2, 4, 5 выполнены с помощью окружностей, а точка 3 – с помощью прямолинейной образующей;

2) строим проекции промежуточных точек 7, 8;

3) соединяем одноименные проекции точек с учетом видимости. На Π_2 невидимыми является участок 1_2-7_2-3_2, а на Π_3 – 2_3-8_3-5_3. Эти участки расположены на невидимых относительно соответствующей плоскости проекций частях конической поверхности.

2 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Пример 1. Даны плоскость Σ и прямая АВ (рис. 8 и рис. 9). Построить точку пересечения прямой и плоскости.

Решение. Прямая и плоскость пересекаются в некоторой точке М (о размерности множества точек, получаемого в пересечении двух заданных множеств см. [4]). Следовательно, эта точка должна принадлежать как исходной прямой, так и плоскости Σ, а значит и некоторой прямой KL этой плоскости. Заметим, что в плоскости Σ через точку М можно провести однопараметрическое множество прямых – ∞^1 [3,4]. Выделив хотя бы одну из них, легко определим искомую точку. Таким образом, поставленная задача сводится к отысканию некоторой прямой n, принадлежащей плоскости Σ и пересекающей заданную пря-мую m.

Прямую n можно рассматривать как проекцию прямой m на заданную плоскость α (в более широком смысле прямая n есть отображение прямой m на плоскость α). Для случая линейного проецирования прямые n и m принадлежат одной плоскости и являются конкурирующими относительно плоскости α. Последнее и используем для определения точки пересечения прямой и плоскости.

Тогда алгоритм решения поставленной задачи будет следующим (рис. 9):

1. На заданной плоскости Σ проводим проекции прямой $KL(K_1L_1, K_2L_2)$, конкурирующей с заданной прямой AB относительно фронтальной плоскости проекций. Прямые AB и KL расположены во фронтально-проецирующей плоскости.

2. Находим точки M_1 и M_2 пересечения проекций прямых AB и KL. Точка M (M_1, M_2) – искомая.

3. Определяем видимость прямой относительно плоскостей проекций. Для установления видимости прямой относительно Π_2 взяты фронтально-конкурирующие точки L и 3, а при установлении видимости относительно Π_1 – горизонтально-конкурирующие точки 1 и 2.

Задача на пересечение прямой и плоскости упрощается, если прямая или плоскость занимают проецирующее положение.

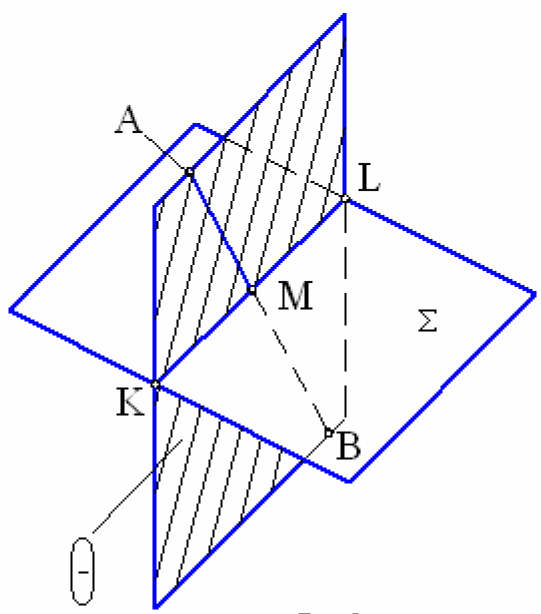


Рис.8

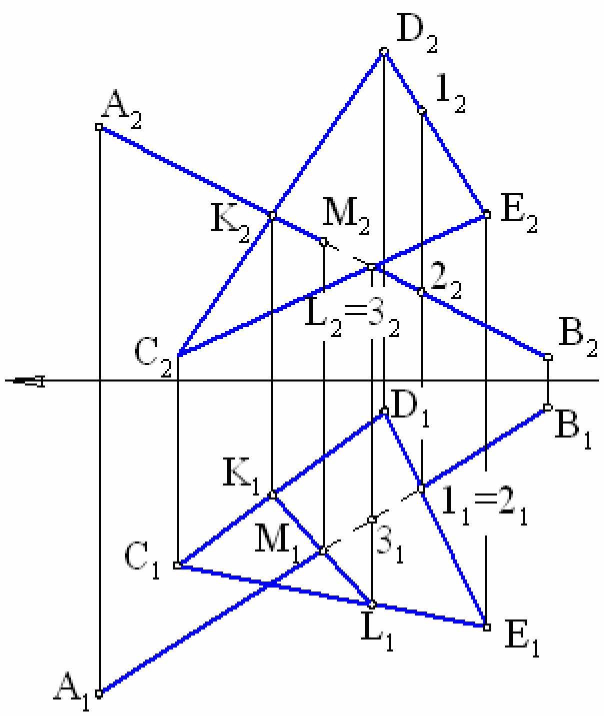


Рис. 9

Пример 2. Даны прямая EF общего положения и фронтально-проецирующая плоскость Σ (рис. 10). Построить точку пересечения прямой и плоскости.

Решение.

1.Определяем фронтальную проекцию точки M (M_2), расположенную в пересечении следа плоскости Σ и E_2F_2 (прямая n, расположенная в плоскости Σ и конкурирующая с EF, на Π_2 совпадает со следом плоскости).

2. Находим M_1 в соответствии с п. 1.1.

3. Устанавливаем видимость проекций прямой (см. рис. 10).

Пример 3. Даны плоскость Σ (ΔABC) и фронтально-проецирующая прямая EF (рис. 11). Построить точку пересечения прямой и плоскости.

Решение. Так как на $П_2$ прямая EF проецируется в точку, то в эту же точку проецируется и искомая точка $M(M_2)$, как принадлежащая заданной прямой. Горизонтальную проекцию точки $M(M_1)$ определяем из условия принадлежности ее плоскости Σ (см. п.1.2). Затем определяем видимость проекций прямой (см. рис. 11). Для этого используются горизонтально-конкурирующие точки 1 и 2.

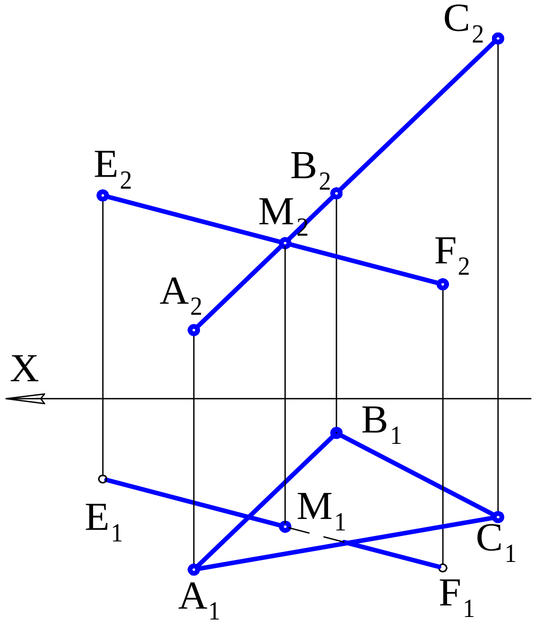


Рис.10

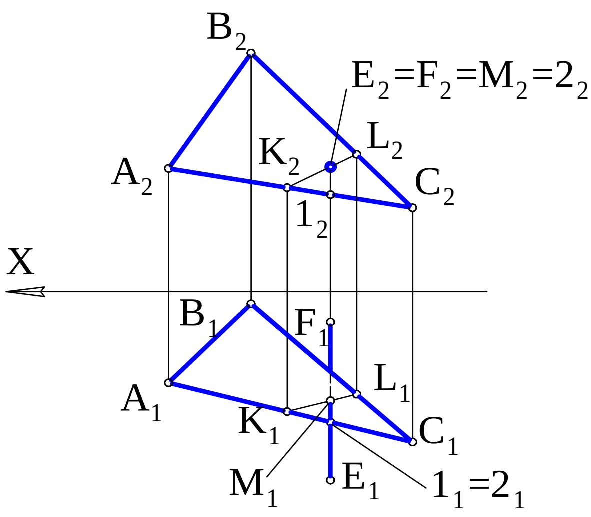


Рис. 11

3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Задача. Даны плоскости α и β. Построить линию пересечения плоскостей (рис. 12).

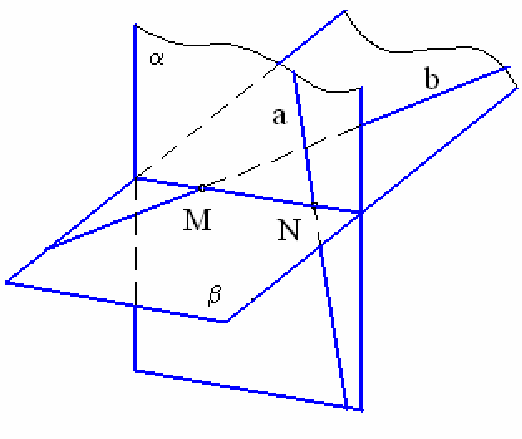


Рис. 12

Решение. Две плоскости пересекаются по прямой, которая однозначно определяется двумя точками. Такие точки можно найти в пересечении двух прямых одной плоскости с другой плоскостью или в пересечении прямой, выбранной в каждой из плоскостей, с другой плоскостью. На рис. 12 $N=a\cap\beta$ и $M=b\cap\alpha$, причем $a\in\alpha$, $b\in\beta$. Следовательно, решение задачи на пересечение плоскостей сводится к двукратному применению алгоритма задачи на пересечение прямой и плоскости.

4 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

Задача. Даны поверхность α и линия n (рис. 13). Построить точки пересечения линии и поверхности.

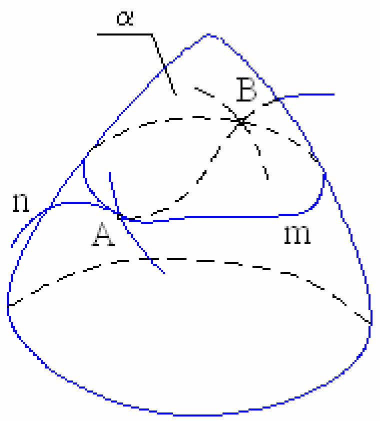


Рис. 13

Решение. Линия и поверхность пересекаются в общем случае в нескольких точках. Алгоритм их определения может быть построен на тех же рассуждениях, что и при построении точки пересечения прямой и плоскости. Действительно, точки A, B, ... пересечения линии и поверхности принадлежат также линиям, проходящим через эти точки и лежащим на заданной поверхности. Как и в задаче на пересечение прямой и плоскости, кривую m можно рассматривать как проекцию линии n на поверхность α. Тогда, в случае параллельного, в частности, ортогонального проецирования, линии n и m будут располагаться на одной цилиндрической поверхности, у которой направляющей является кривая n, а образующие параллельны направлению проецирования. В случае, если линия n прямая, то n и m находятся в одной проецирующей плоскости. В обоих случаях линии n и m являются конкурирующими относительно соответствующей плоскости проекций. Последнее и используем в алгоритме решения поставленной задачи.

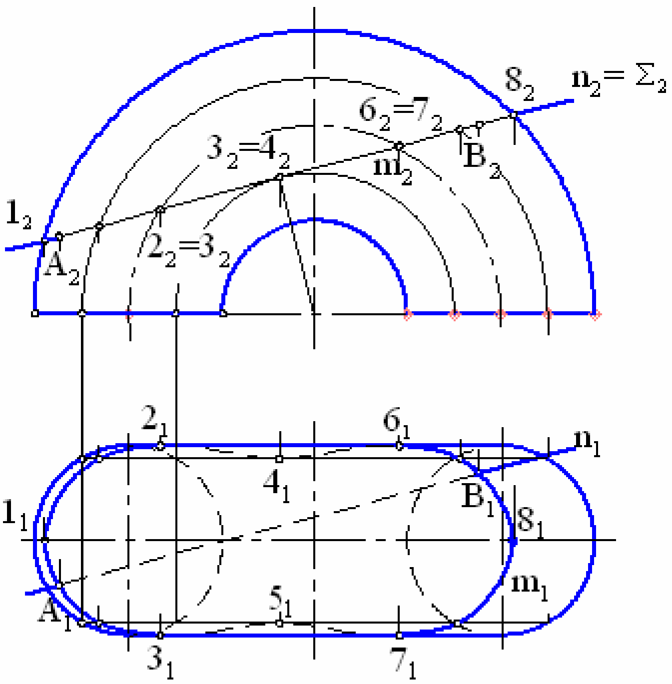


Рис. 14

Пример 1. Даны прямая n и тор (рис. 14). Построить точки пересечения прямой и поверхности.

Решение. 1. Выбираем на заданной поверхности линию m, например, фронтальноконкурирующую с заданной прямой n. Линии n и m пересекаются (в общем случае), т.к. они находятся в одной фронтально-проецирующей плоскости.

2. Определяем горизонтальную проекцию линии m(m_1), исходя из условия принадлежности ее поверхности (см.п.1.3).

3. Находим точки А и В пересечения линий n и m, которые и являются искомыми.

4. Устанавливаем видимость проекций прямой. Так участок AB прямой n, расположенный внутри поверхности, невидим на $П_1$ и $П_2$. Кроме того, на $П_2$ невидим отрезок прямой n правее точки B_2 до точки на очерке поверхности, а на $П_1$ – левее точки 5_1, также до точки на очерке поверхности. Эти отрезки закрыты поверхностью.

Пример 2. Даны прямая n и сфера (рис.15). Построить точки пересечения прямой и поверхности.

Решение 1. Вводим на поверхности сферы линию m, например, горизонтально-конкурирующую с прямой n. Кривая m – окружность.

2. Определяем фронтальную проекцию линии m(m_2), кривая m_2 – эллипс.

3. Находим точки А и В пересечения линий n и m.

4. Устанавливаем видимость проекций прямой.

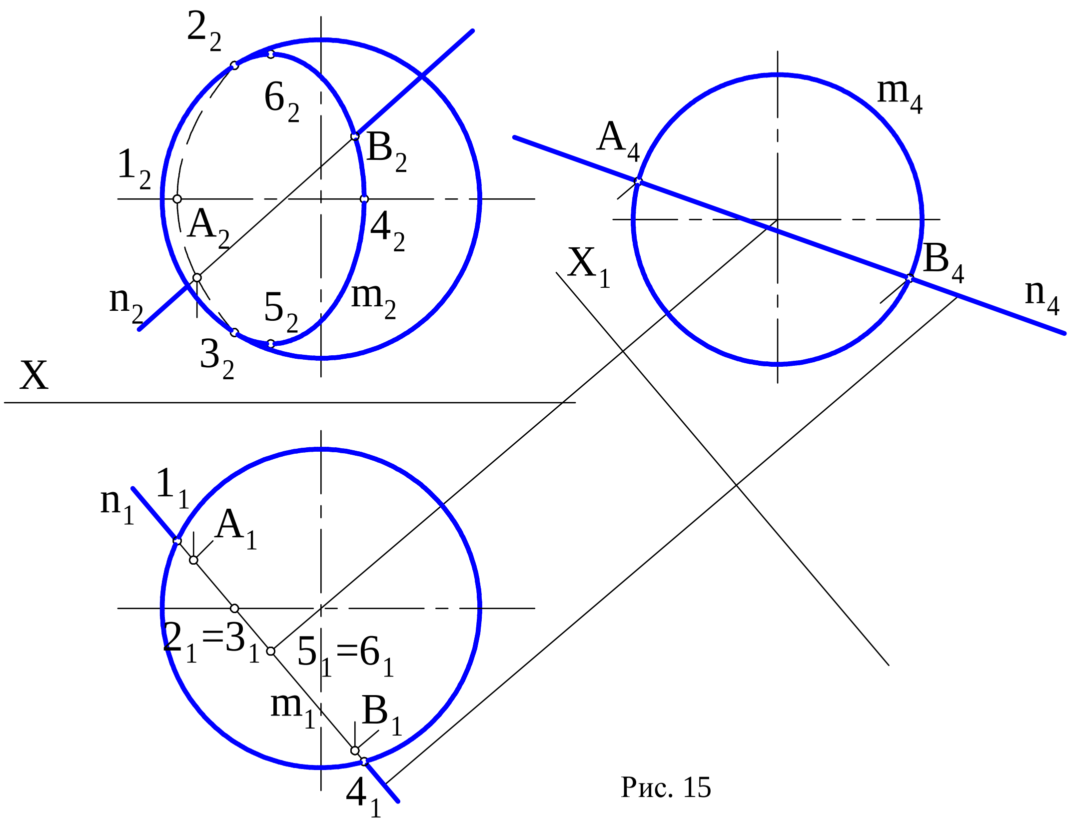


Рис. 15

На рис. 15 показано построение точек А, В и с помощью дополнительной плоскости проекций $П_4$. На эту плоскость окружность проецируется без искажения и для определения проекций точек А и В не требуется строить лекальную кривую – эллипс.

Пример 3. Даны кривая n и цилиндроид Г (a, b, Σ) (рис. 16). Построить точки пересечения линии и поверхности.

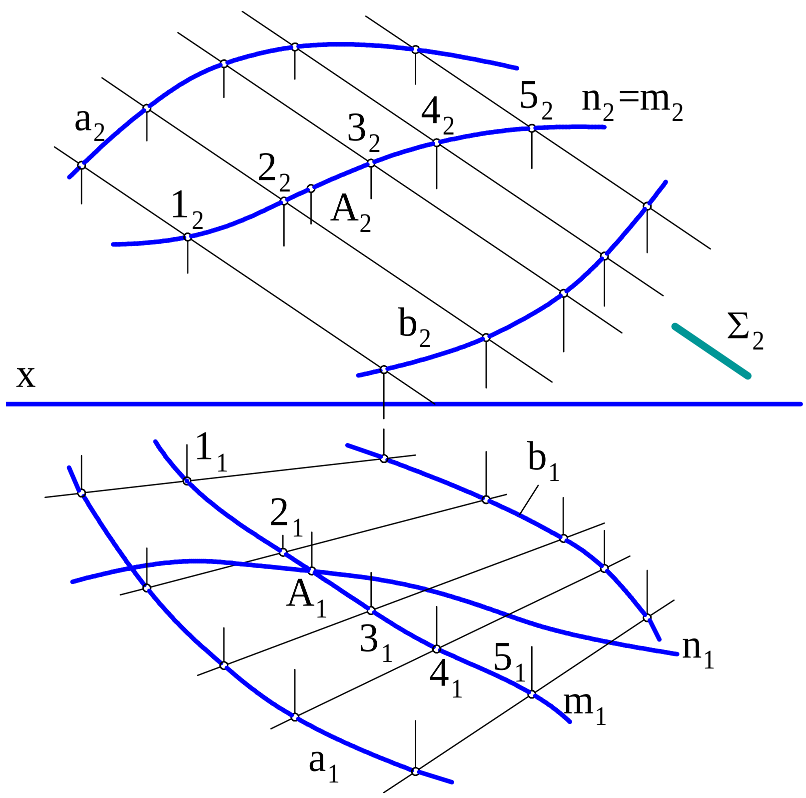


Рис. 16

Решение. 1. На поверхности цилиндроида вводим кривую m, фронтально-конкурирующую с линией n. Эти кривые пересекаются (в общем случае), т.к. расположены на одной фронтально-проецирующей цилиндрической поверхности, у которой линия n – направляющая, а образующие перпендикулярны Π_2.

2. Строим горизонтальную проекцию кривой $m(m_1)$ (см. п.1. 4).

3. Находим горизонтальную проекцию точки $A(A_1)$-$A_1=n_1 \cap m_1$, а затем и A_2 ($A_2 \in n_2$).

Пример 4. Даны прямая n и коническая поверхность (рис. 17). Построить точки пересечения линии и поверхности.

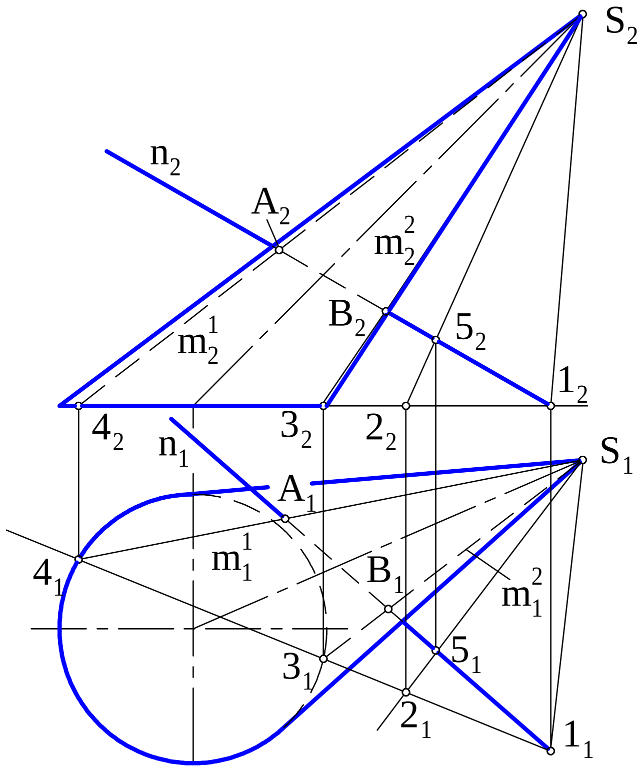


Рис. 17

Решение. Поставленную задачу также можно решить, задав на конической поверхности линию m, конкурирующую с прямой n относительно плоскости проекций Π_1 или Π_2. Полученные кривые в этом случае будут лекальные, что требует значительных построений и снижает точность решения задачи. Так как заданная поверхность линейчатая, то в качестве линии m на поверхности целесообразно взять прямую (или прямые) – образующую. Тогда алгоритм решения задачи будет следующим:

1. Спроецируем из точки S прямую n на плоскость Π_1, т.е. определим центральную проекцию

прямой n на плоскость $П_1$. Для этого проводим два проецирующих луча через точки 1 и 5 прямой n до пересечения с плоскостью проекций $П_1$. Точки 1 и 2 задают центральную проекцию прямой n на $П_1$.

2. Строим образующие m^1 и m^2 на конической поверхности, конкурирующие с n относительно $П_1$ при ее центральном проецировании. Для этого вначале определяем точки $3(3_1 3_2)$ и $4(4_1 4_2)$, в которых проецирующая плоскость $\Sigma(1 \cap 5)$ пересекает основание отсека конической поверхности.

3. Находим точки А и В пересечения прямой n с образующими m^1 и m^2. Точки А и В – искомые.

4. Устанавливаем видимость проекций прямой.

5 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ

Линия пересечения поверхности с плоскостью представляет собой плоскую кривую, называемую сечением. Точки этой кривой можно рассматривать как точки пересечения линий поверхности с плоскостью или прямых плоскости с поверхностью. Отсюда следует два варианта построения сечения: 1) выбираем конечное число линий на поверхности и определяем точки пересечения их с плоскостью; 2) выделяем конечное число прямых на плоскости и строим точки пересечения их с поверхностью. Заметим, что возможно решение, представляющее собой комбинацию этих вариантов. В любом случае построение сечения сводится к многократному применению алгоритма решения задачи на пересечение линии и поверхности.

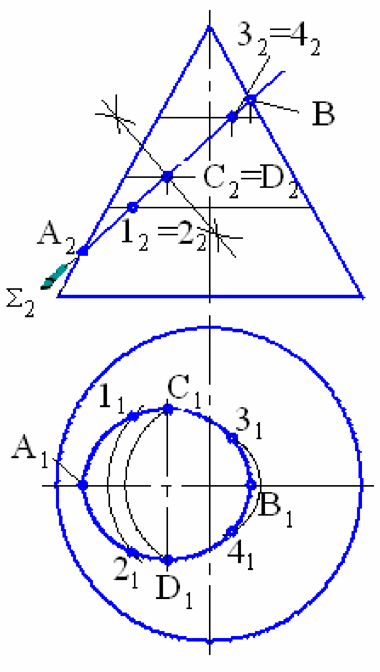


Рис. 18

Построение сечения сущест-венно упрощается, если плоскость занимает проецирующее положение. Это связано с тем, что проецирующая плоскость характеризуется собирательным свойством. В этом случае одна из проекций сечения находится на следе плоскости, т.е. известна. Построения недостающей проекции сечения выполняют как в задаче п.1.4.

Пример 1. Построить проекции сечения конической поверхности вращения с фронтально-проецирую-щей плоскостью Σ (рис. 18).

Решение. Заданная плоскость Σ пересекает исходную поверхность по эллипсу, фронтальная проекция которого расположена на следе этой плоскости. Горизонтальную проекцию сечения строим по точкам в соответствии с задачей на принадлежность линии поверхности.

Проекцию эллипса на плоскость $П_1$ можно построить также по его большой A_1B_1 и малой C_1D_1 осям.

6 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Линия пересечения двух поверхностей представляет собой в общем случае пространственную кривую. Любая точка этой линии принадлежит как первой, так и второй поверхностям и может быть определена в пересечении линий, проведенных на этих поверхностях (рис. 19). Исходя из этого, можно предложить следующие варианты решения задачи:

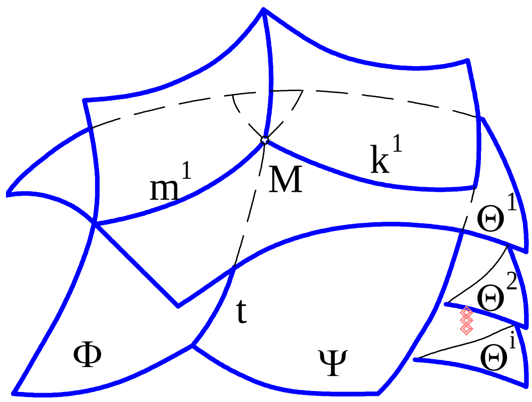


Рис. 19

1) выбрать на одной из поверхностей конечное число линий и построить точки пересечения их с другой поверхностью (решение такой задачи см. выше);

2) выделить на заданных поверхностях два семейства линий и найти их точки пересечения. Во втором варианте выделение пересекающихся пар кривых выполняют с помощью вспомогательных поверхностей-посредников, из которых наибольшее применение нашли плоскости и сферы. Поверхности-посредники выбирают таким образом, чтобы в пересечении их с заданными поверхностями находились графически простые линии или линии, которые проецировались бы в графически простые.

Так, способ концентрических сфер применяют в случае, если:

1) заданные поверхности – поверхности вращения;

2) оси поверхностей вращения пересекаются;

3) общая плоскость симметрии поверхностей параллельна какой-либо плоскости проекций (если это условие не выполняется, то следует использовать преобразование чертежа).

Другой способ – способ эксцентрических сфер применяют при условии, что:

1) одна из поверхностей – поверхность вращения, а другая имеет семейство окружностей;

2) поверхности имеют общую плоскость симметрии;

3) общая плоскость симметрии поверхностей параллельна плоскости проекций (в противном случае следует применить преобразование чертежа).

В целом алгоритм решения задачи на пересечение поверхностей включает следующие этапы:

1. Анализ исходных поверхностей с целью выбора поверхности-посредника.

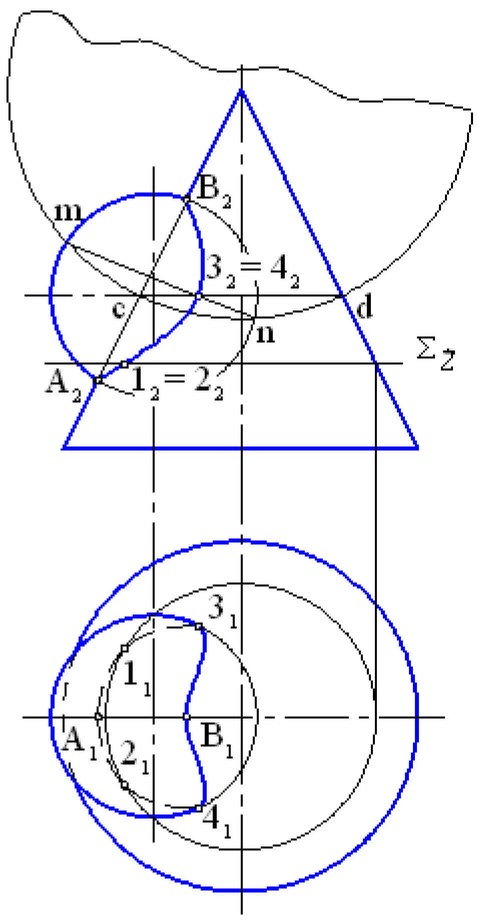


Рис. 20

2. Построение характерных (опорных) точек проекций линии пересечения поверхностей.

3. Построение промежуточных точек.

4. Установление видимости проекций линии пересечения поверхностей.

5. Оформление чертежа.

Пример 1. Построить проекции линии пересечения конической поверхности и сферы (рис. 20).

Решение 1. Заданные поверхности – поверхности вращения. Оси заданных поверхностей пересекаются, любая прямая, проходящая через центр сферы, может быть принят за ось вращения, а их общая плоскость симметрии параллельна фронтальной плоскости проекций. Следовательно, для решения задачи можно использовать способ сферического посредника, в частности, способ концентрических сфер.

Кроме того, на заданных поверхностях можно выделить два семейства окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных горизонтальной плоскости проекций. Это значит, что для решения данной задачи можно использовать в качестве посредников и плоскости (горизонтальные плоскости уровня).

2. Характерными точками проекций линии пересечения поверхностей являются точки A, B и 3, 4. Точки A и B находятся в пересечении очерковых образующих поверхностей, т.к. эти образующие расположены в общей плоскости симметрии поверхностей.

Точки 3, 4 являются точками видимости горизонтальной проекции линии пересечения. Они определены с помощью сферы-посредника в такой последовательности:

1) на конической поверхности на $П_2$ проведена проекция окружности (отрезок cd, проходящий через центр сферы);

2) построена сфера с центром на оси конической поверхности так, что ее фронтальный очерк проходит через концы отрезка cd (сколько таких сфер можно построить?);

3) определена окружность (на $П_2$ – отрезок mn), по которой сфера-посредник пересекает заданную сферу;

4) находим фронтальные, а затем и горизонтальные проекции точек 3, 4. Точки $3_2=4_2$ находятся в пересечении окружностей cd и mn, а 3_1 и 4_1 расположены на горизонтальной проекции очерка сферы.

3. Построение промежуточных точек выполнено с помощью вспомогательных плоскостей-посредников и показано на примере точек 1, 2. Построения выполнены в такой последовательности:

а) введена горизонтальная уровня плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$;

б) построены горизонтальные проекции окружностей, по которым плоскость пересекает поверхности. Точки 1_1 и 2_1 находятся в пересечении этих окружностей;

в) определены точки $1_2=2_2$ на следе плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$.

4. Так как заданные поверхности имеют общую (фронтальную уровня) плоскость симметрии, то на $П_2$ проекции видимого и невидимого участков линии пересечения совпадут.

На конической поверхности относительно $П_1$ видимой является вся линия пересечения. Однако на поверхности сферы относительно той же плоскости $П_1$ видимым является лишь участок 3_1-B_1-4_1. Значит, в целом на $П_1$ участок 3_1-B_1-4_1будет видимым, а остальная проекция линии – невидимой.

Пример 2. Построить линию пересечения двух конических поверхностей вращения (оси поверхностей пересекаются) (рис. 21).

Решение 1. Исходные поверхности и их расположение удовлетворяют условиям применимости способа концентрических сфер, который и используем для решения поставленной задачи.

2. Заданные поверхности имеют фронтальную уровня плоскость симметрии. Очерковые образующие поверхностей, расположенные в этой плоскости, задают характерные точки A, B, C, D.

3. Для построения промежуточных точек линии пересечения определим границы (R_{min} и R_{max}) изменения радиуса сфер-посредников, центры которых находятся в точке O пересечения осей вращения.

Сфера минимального радиуса R_{min} – это сфера, которая вписана в одну из поверхностей и пересекает другую (или касается ее). На рис. 21 сфера R_{min} вписана в коническую поверхность с вертикальной осью. Наибольший радиус сферы-посредника равен отрезку $|O_2D_2|$.

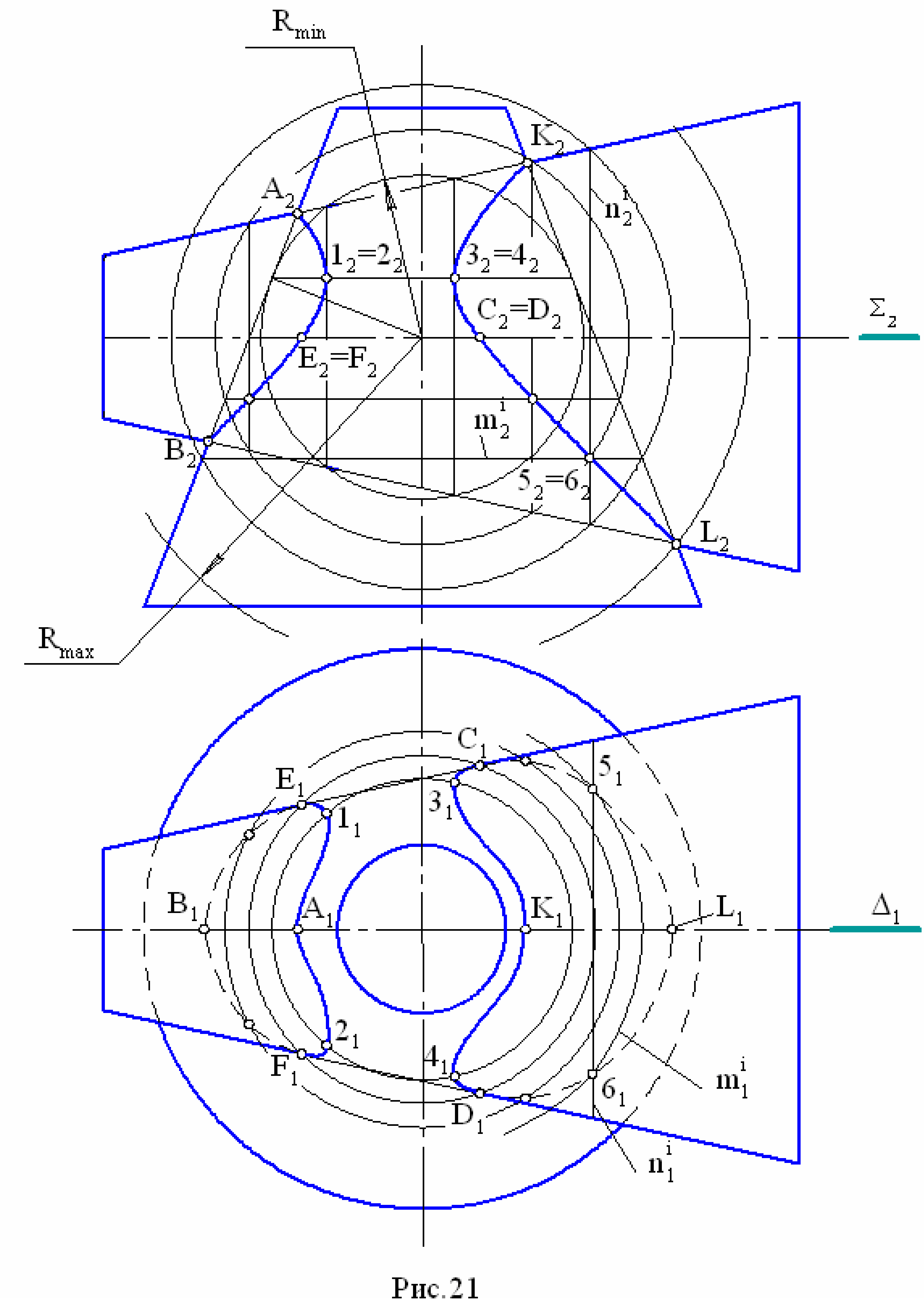


Рис.21

Построение промежуточных точек линии пересечения поверхностей с помощью сферы-посредника выполнено в такой последовательности:

1) введена сфера-посредник с центром в точке O;

2) определены окружности, по которым сфера пересекает заданные поверхности; на $П_2$ эти окружности проецируются в отрезки прямых, соединяющих точки пересечения очерка сферы с очерками поверхностей;

3) пересечение окружностей задает фронтальные проекции точек линии пересечения.

Построенные с помощью сферы R_{min} точки 1, 2, 3, 4 как и точки A, B, C, D, E и F являются характерными.

4. Как и в предыдущем примере, поверхности имеют общую (фронтальную уровня) плоскость симметрии, и на Π_2 проекции видимого и невидимого участков линии пересечения совпадут.

Пример 3. Построить фронтальную проекцию линии пересечения поверхностей Σ и Δ, плоскость симметрии которых параллельна Π_2 (рис. 22).

Решение 1. Заданные поверхности и их расположение удовлетворяют условиям применимости способа эксцентрических сфер, который и применяем для решения поставленной задачи.

2. Опорными точками являются точки A и B, расположенные в пересечении очерковых образующих поверхностей.

3. Построение промежуточных точек выполнено в такой последовательности:

1) проведена на конической поверхности Σ окружность, которая расположена в плоскости, параллельной ее основанию и на Π_2 (рис. 22) проецируется в отрезок (например, mn);

2) построен перпендикуляр к плоскости этой окружности через центр O^1_2 и найден центр O^2_2 сферы-посредника;

3) проведены проекции сферы с центром в точке O^2_2 так, что она проходит через построенную ранее окружность;

4) построена окружность, по которой сфера-посредник пересекает поверхность вращения Δ (на Π_2 – отрезок cd);

5) определены точки $1_2=2_2$ пересечения построенных окружностей.

Проекции других точек линии пересечения определяют аналогично.

4. На Π_2 проекции видимого и невидимого участков линии пересечения совпадут.

Примечание. Предложите решение этой задачи, используя второе семейство окружностей на эллиптическом конусе.

Пример 4. Построить проекции линии пересечения поверхностей α и β (рис. 23).

Решение. Исходные поверхности и их расположение удовлетворяют условиям применимости способа концентрических и эксцентрических сфер. На рис. 23 точки 1, 2, 3, 4 построены способом концентрических сфер, а точки 5 и 6 – способом эксцентрических сфер.

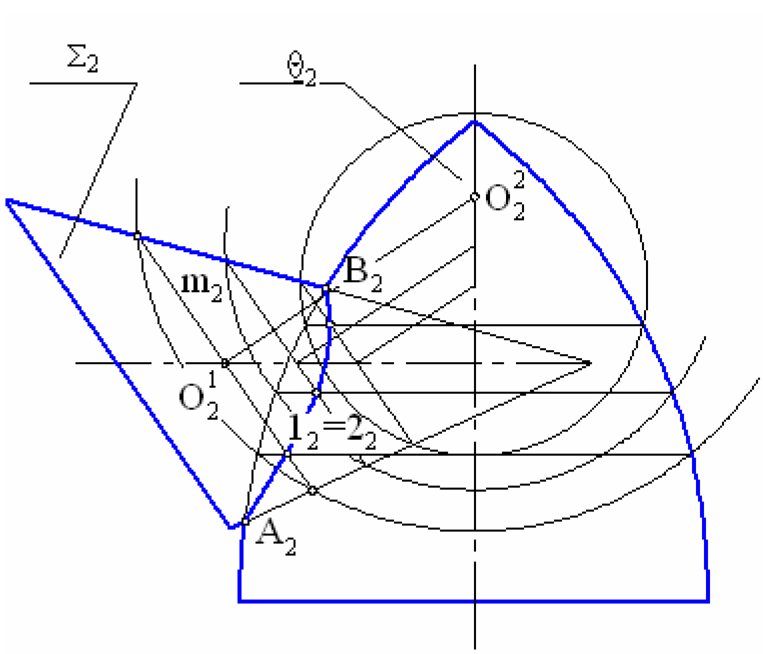


Рис. 22

Точки A, B, C, D, а также K, L, M, N являются характерными. Первые расположены в пересечении очерковых образующих поверхностей, а вторые – на сфере минимального радиуса.

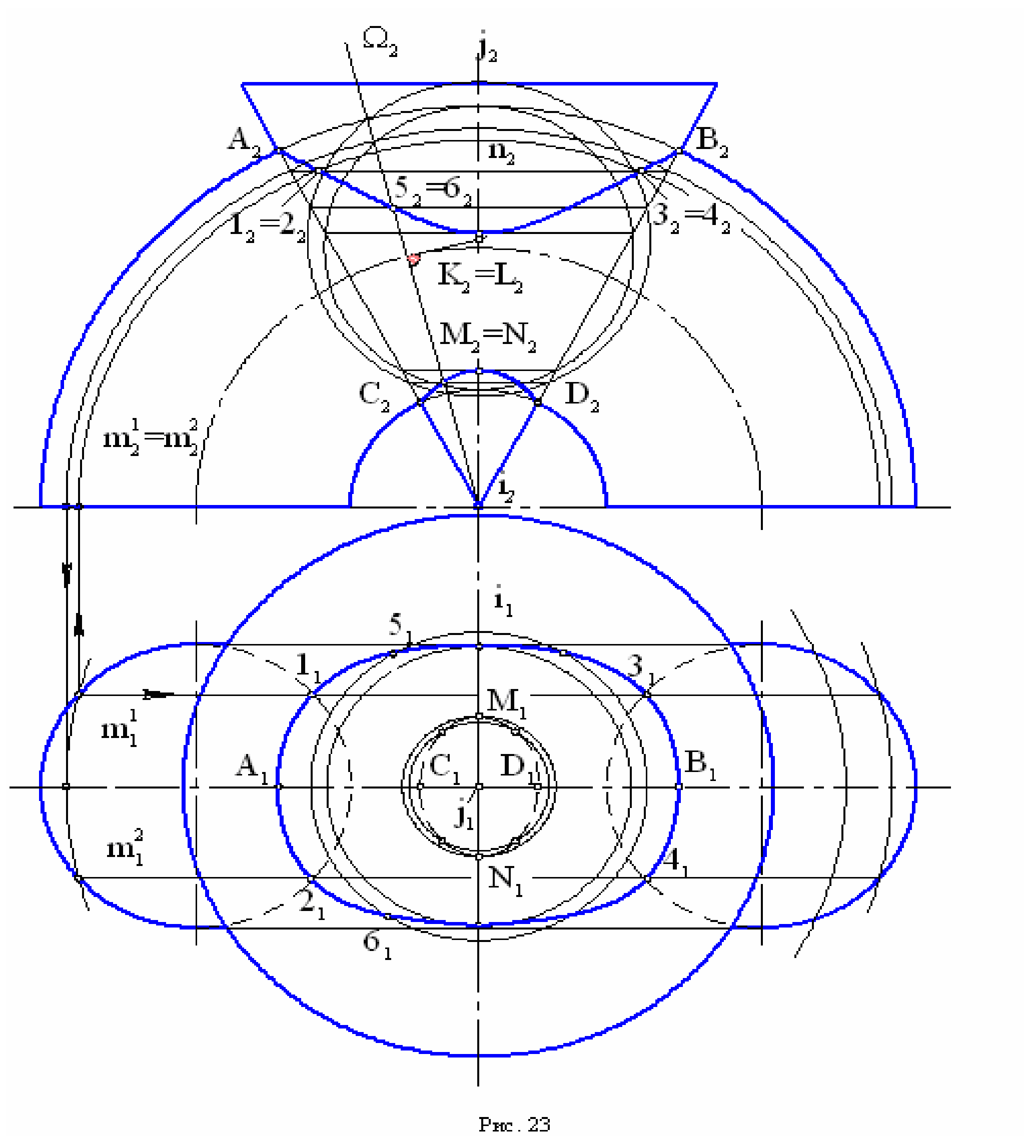


Рис. 23

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рустамов, Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии / Х.А. Рустамов. – М.: Машиностроение, 1978. – 375 с.

2. Курс начертательной геометрии (на базе ЭВМ): учеб. для инж.-техн. вузов / Тевлин А. М., Иванов Г.С., Нартова Л.Г. и др.; под ред. А.М. Тевлина. – М.: Высш. школа, 1983. – 175 с.

3. Конструирование кривых линий и поверхностей на основе теории параметризации: Метод. указания для механических специальностей / Сост.: А.Н. Силаенков, В.Я. Волков, А.А. Ляшков. – Омск, 1987. – 32 с.

4. Первикова, В.Н. Основы многомерной начертательной геометрии. Краткое введение в многомерную начертательную геометрию / В.Н. Первикова. – М.: МАИ, 1976. – 34 с.

5. Четверухин, Н.Ф. Параметризация и ее применение в геометрии / Н.Ф. Четверухин, Л.А. Яцкевич // Метаматика в школе. 1963. № 5.С.15-23.

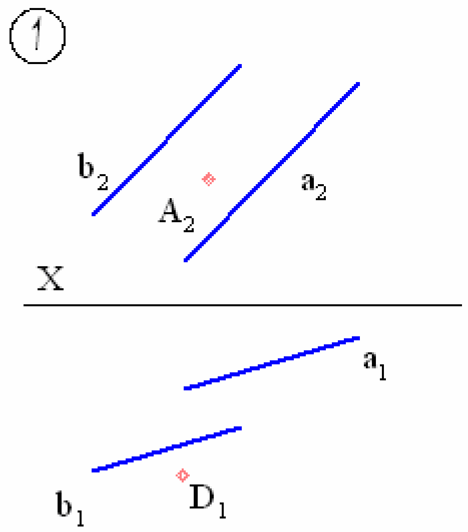
6. Фролов, С.А. Начертательная геометрия / С.А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.

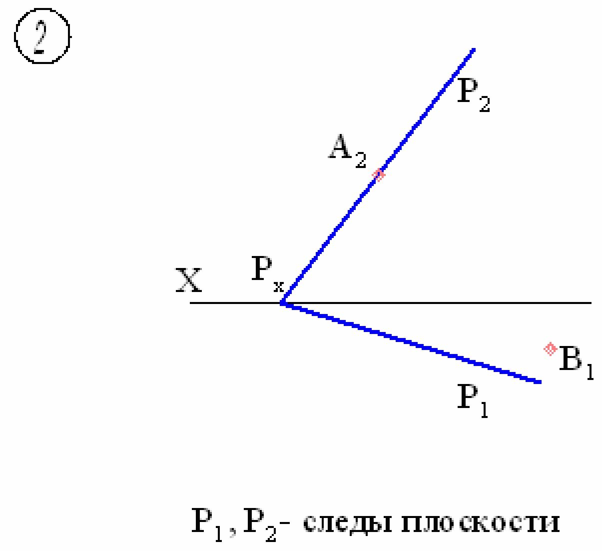
7. Фролов, С.А. Автоматизация процесса графического решения задач / С.А. Фролов. – Минск: Вышэйш. школа, 1980. – 255 с.

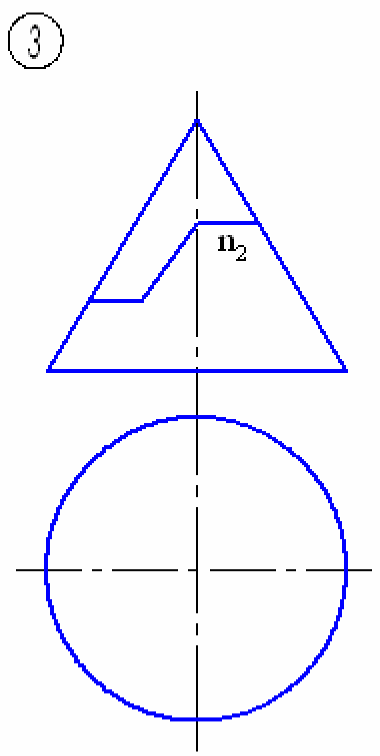
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

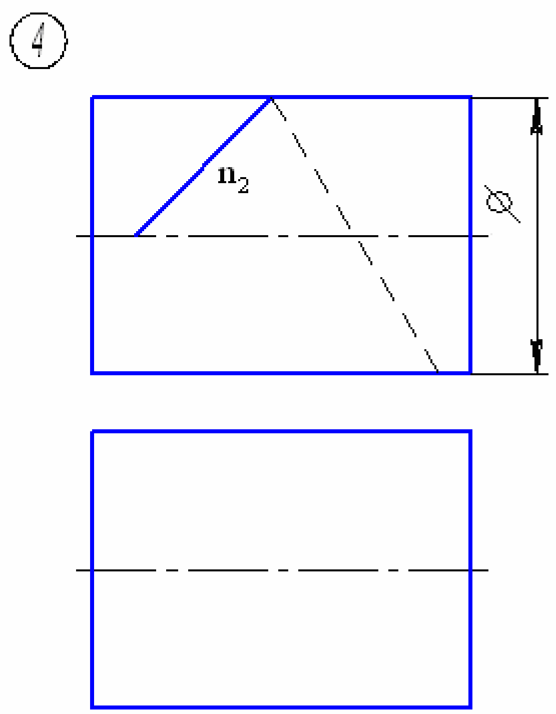
ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ И ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ ПОВЕРХНОСТИ

Построить недостающие проекции точек и линий на заданных плоскостях (задачи 1 и 2) и поверхностях (задачи 3-12)

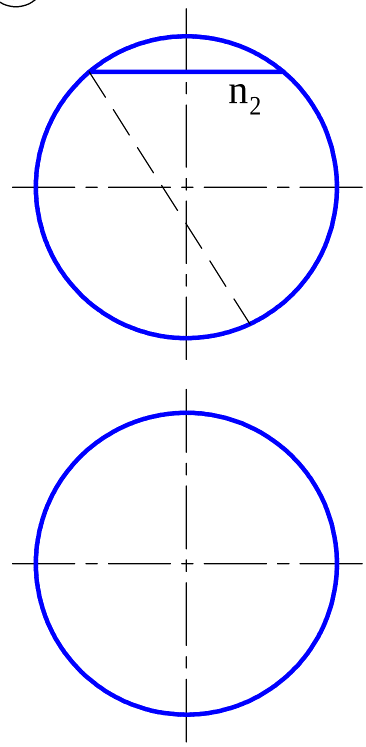




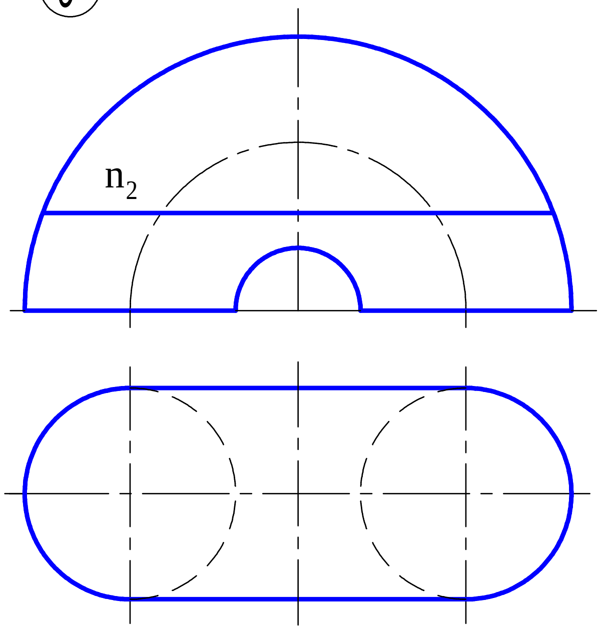




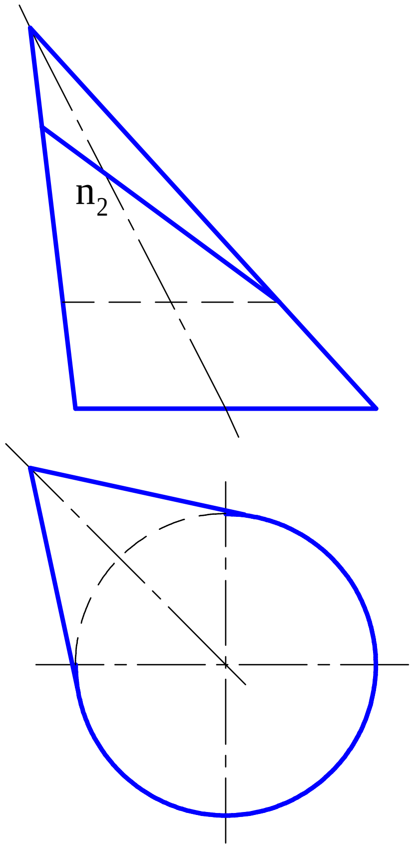
5



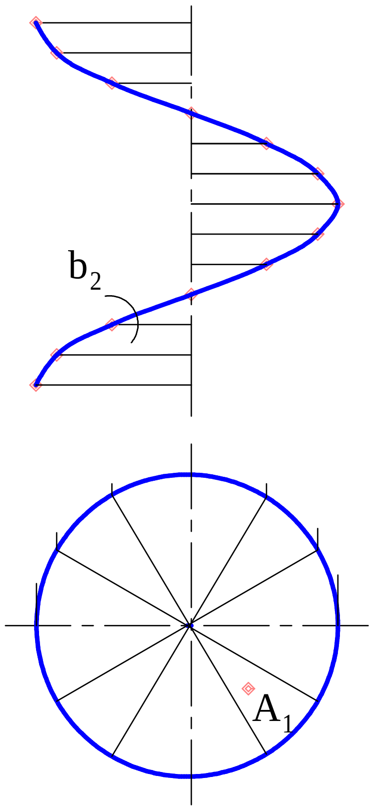
6



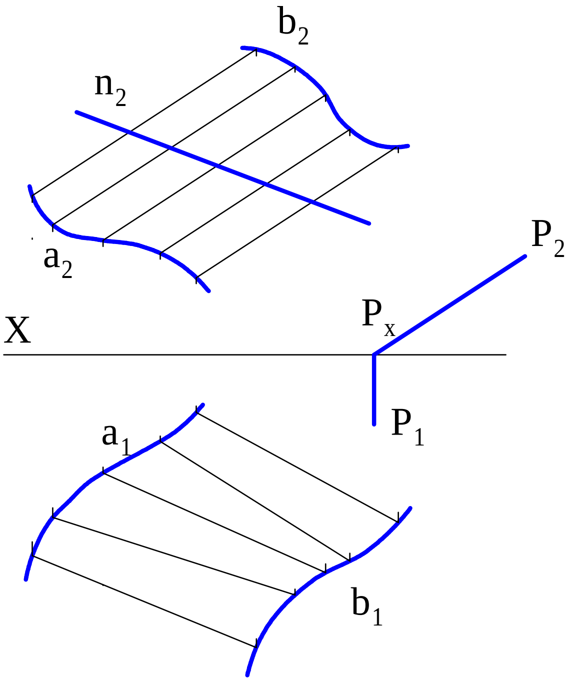
7



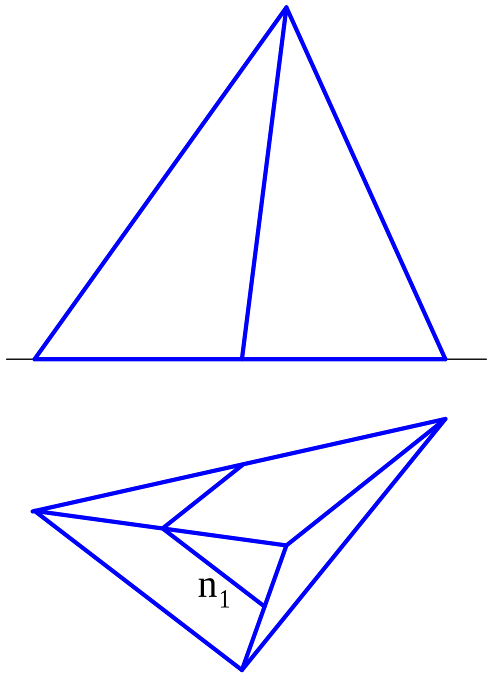
8



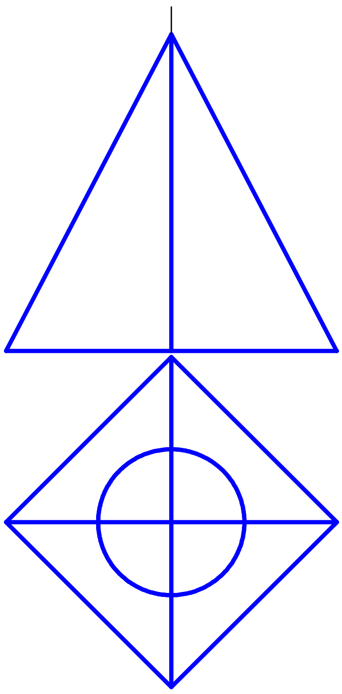
9



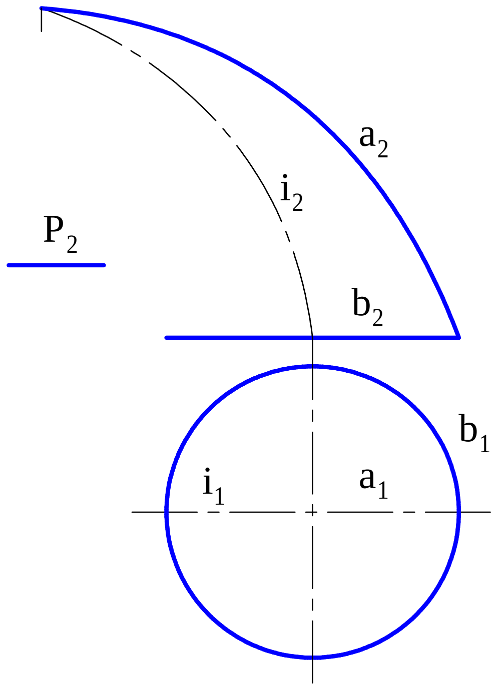
10



11

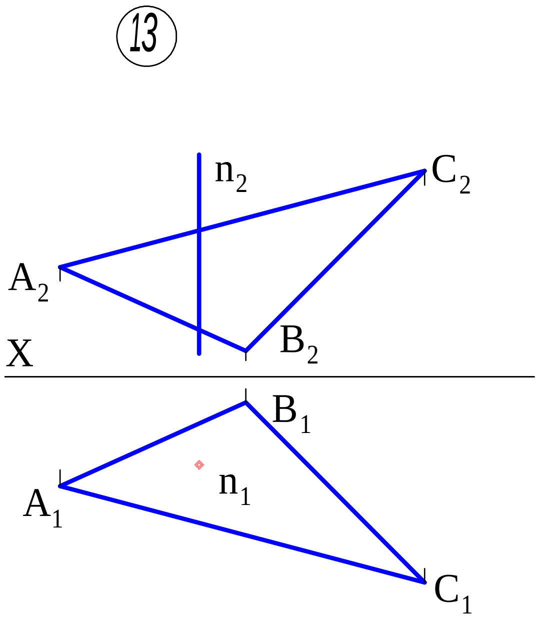


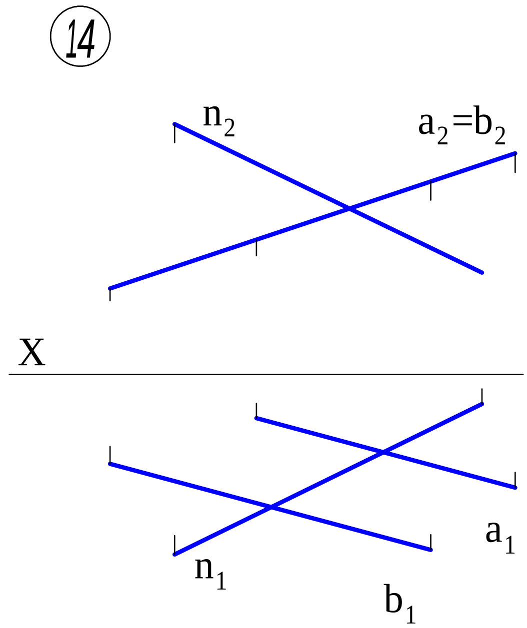
12

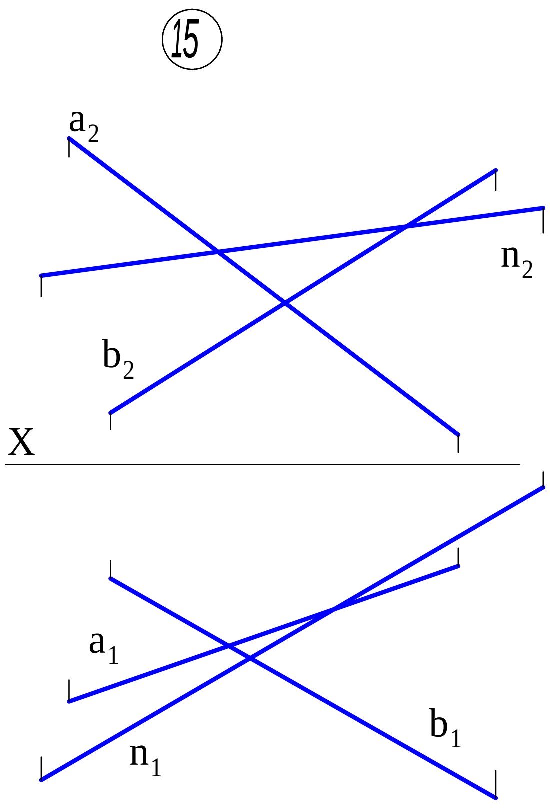


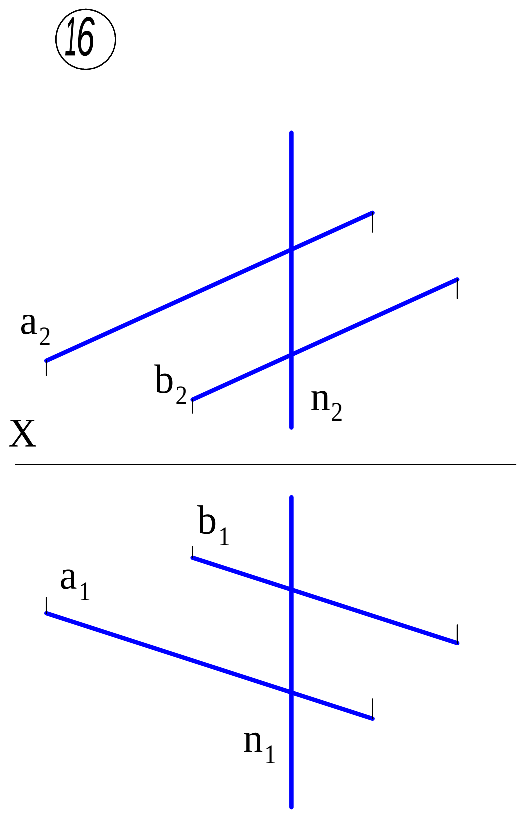
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

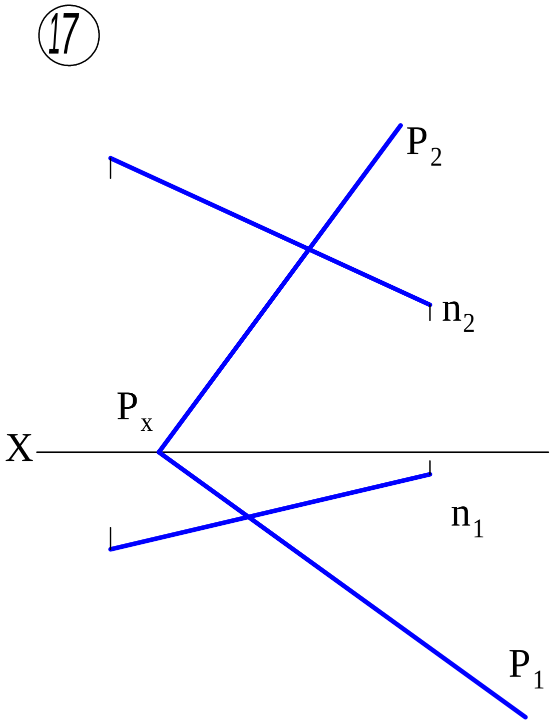
Построить точки пересечения прямых и плоскостей, указать видимость (задачи 13-18)

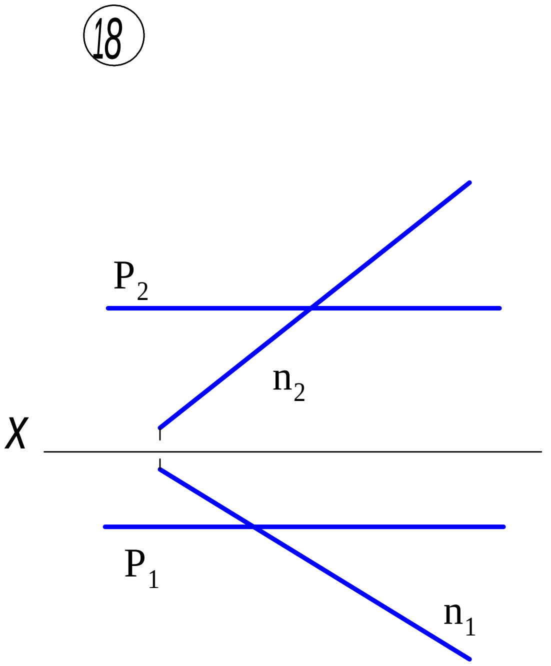




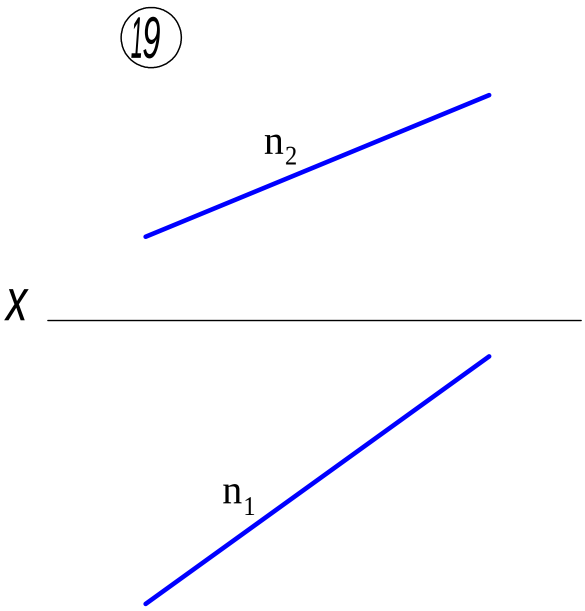


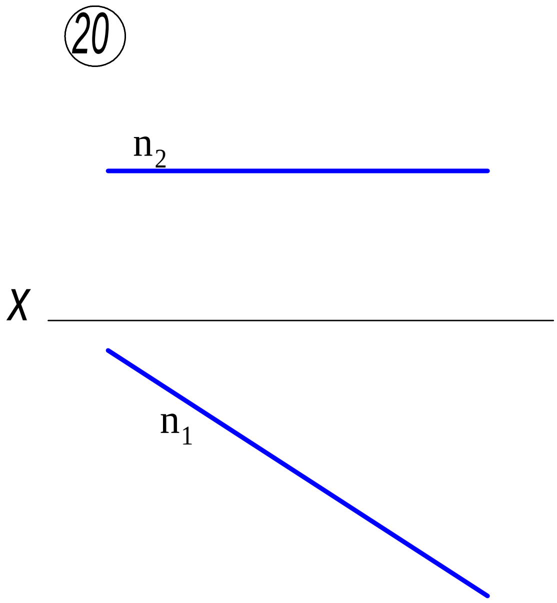






Построить точки пересечения прямой n с плоскостями проекций $П_1$ и $П_2$ (задачи 19-20)

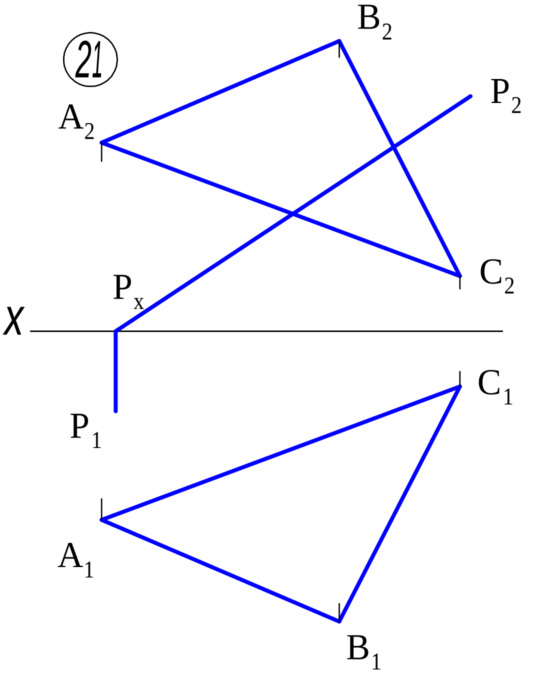




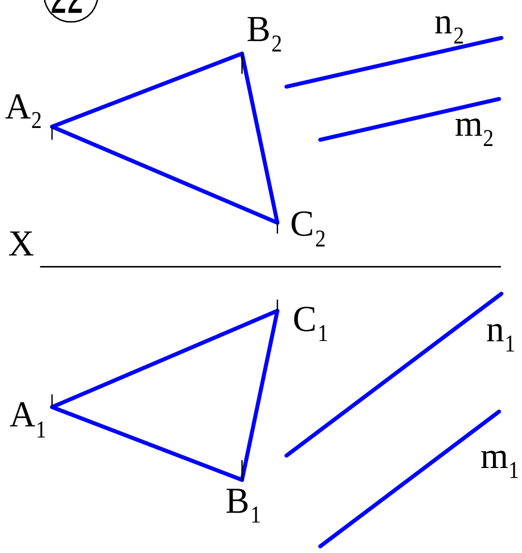
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Построить линии пересечения плоскостей (задачи 21-23)

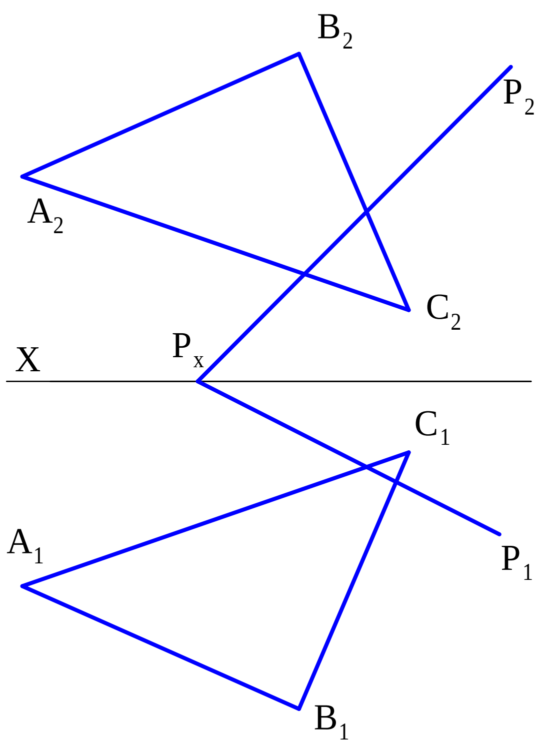
21



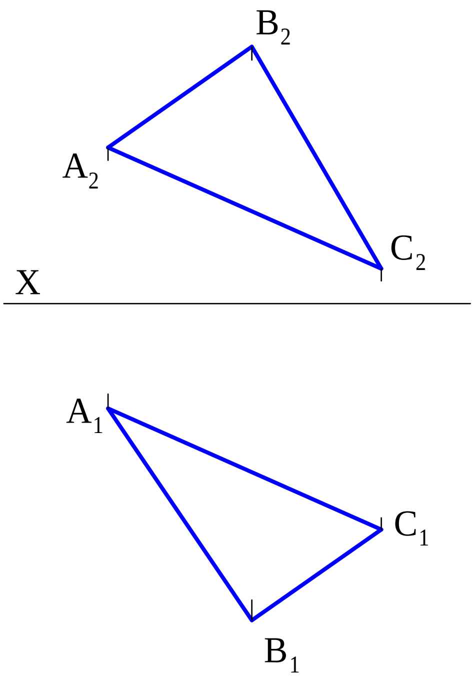
22



23

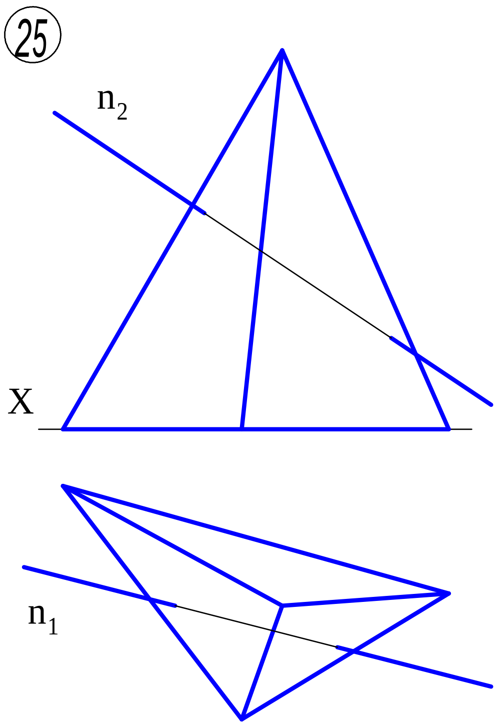


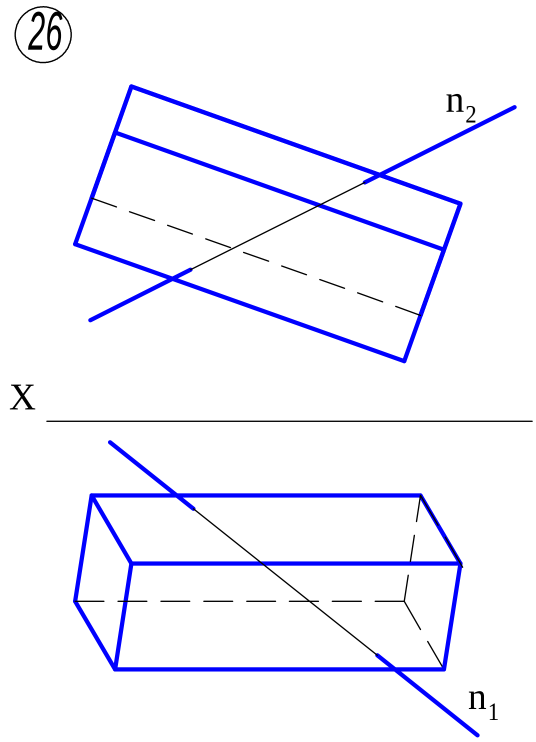
24 Построить линию пересечения плоскости S (DABC) с плоскостями проекций

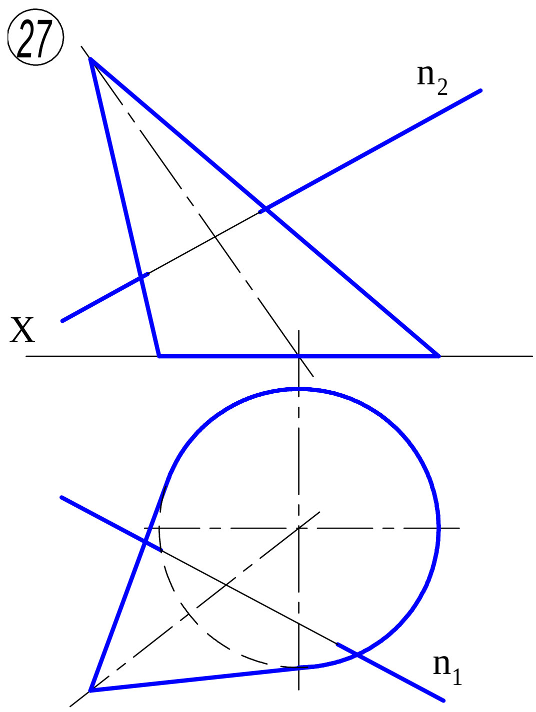


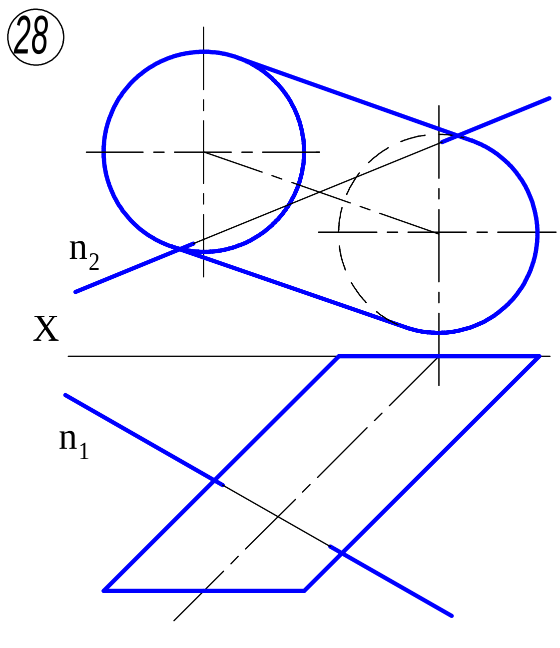
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

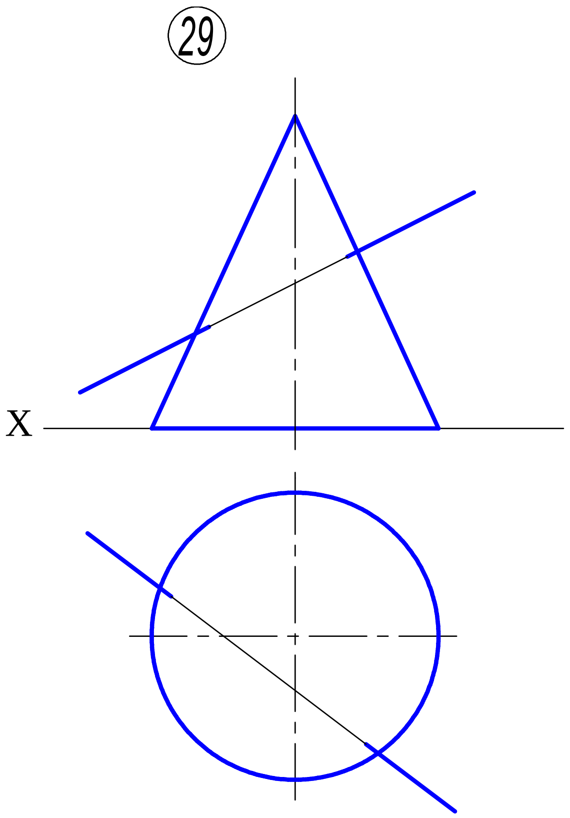
Построить точки пересечения линий и поверхностей, указать видимость (задачи 25-32)

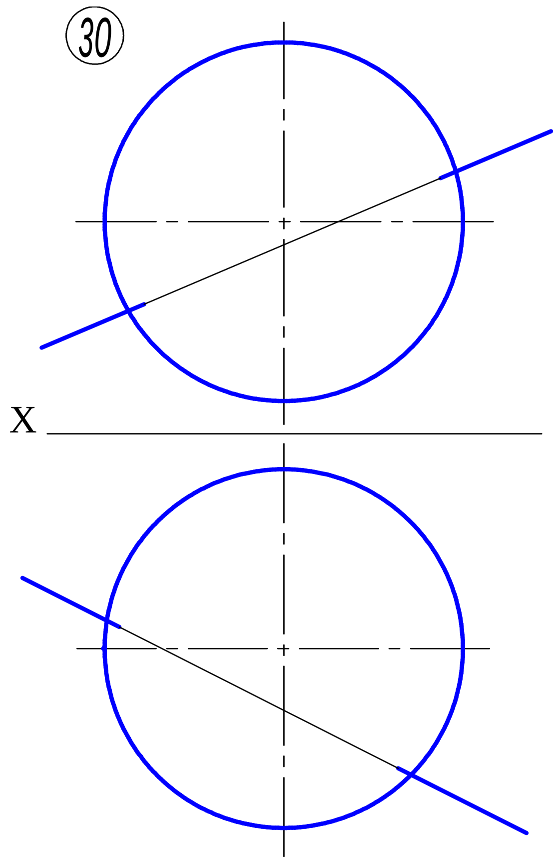


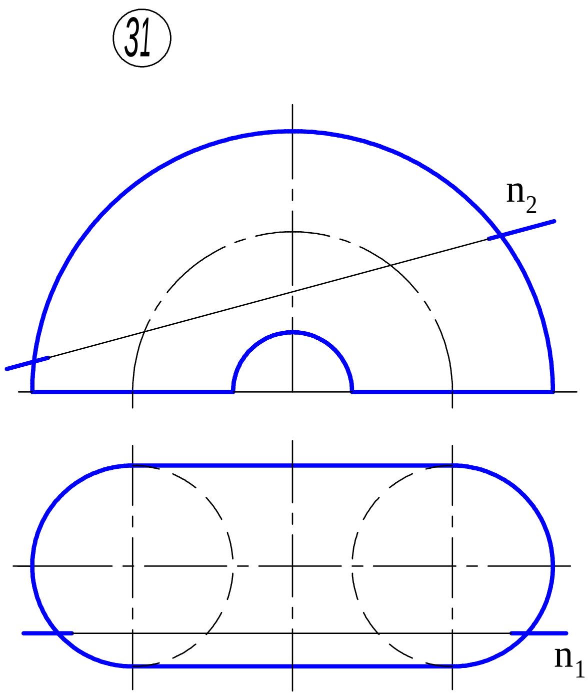


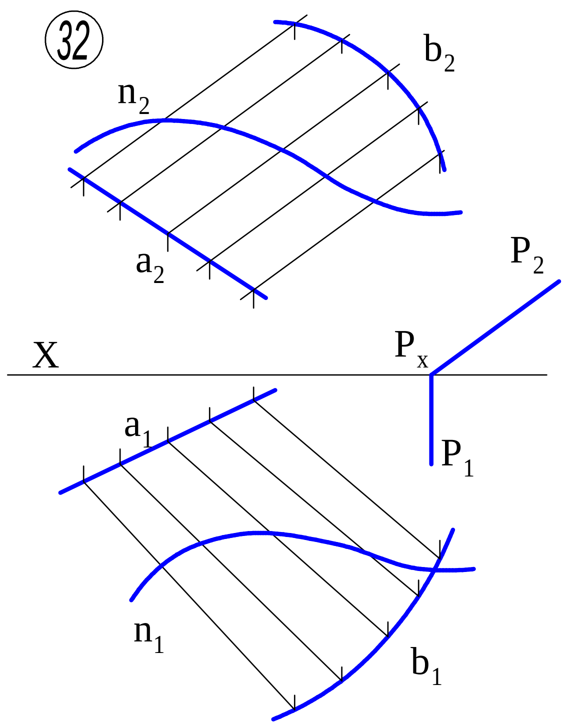





29
X


30
X

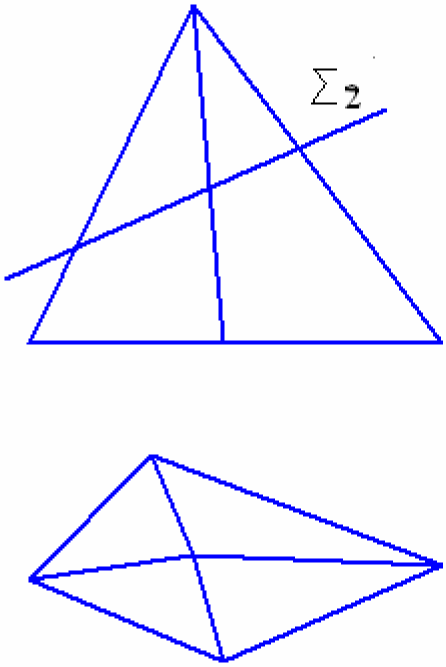

31
n_2
n_1


32
b_2
n_2
a_2
P_2
X
P_x
a_1
P_1
n_1
b_1

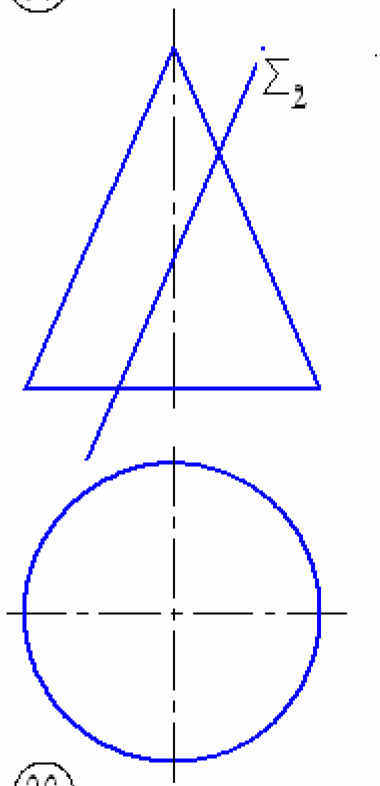
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ

Построить сечение поверхности плоскостью, указать видимость (задачи 33-44)

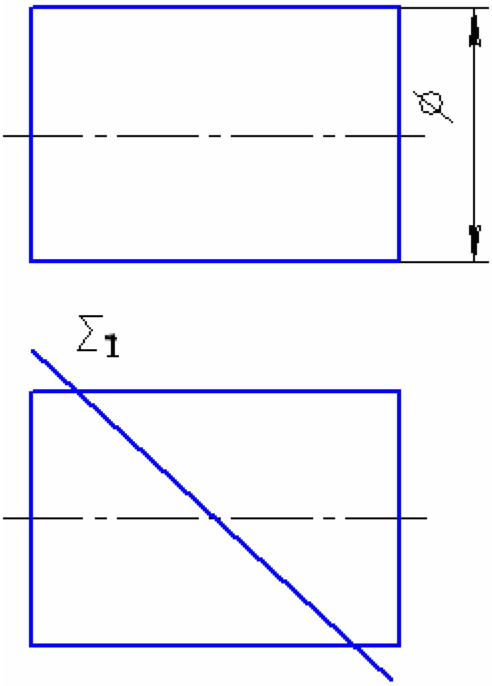
33



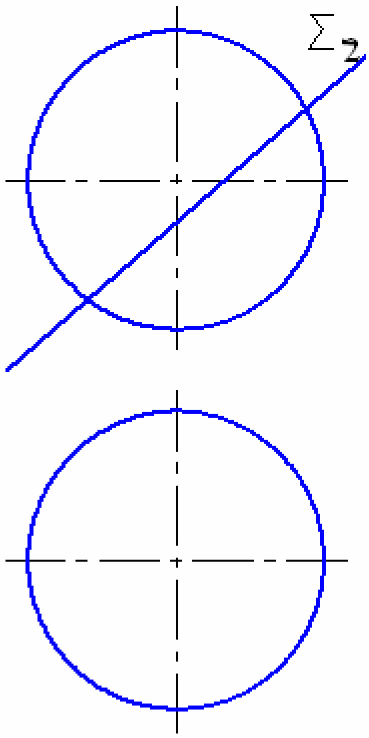
34



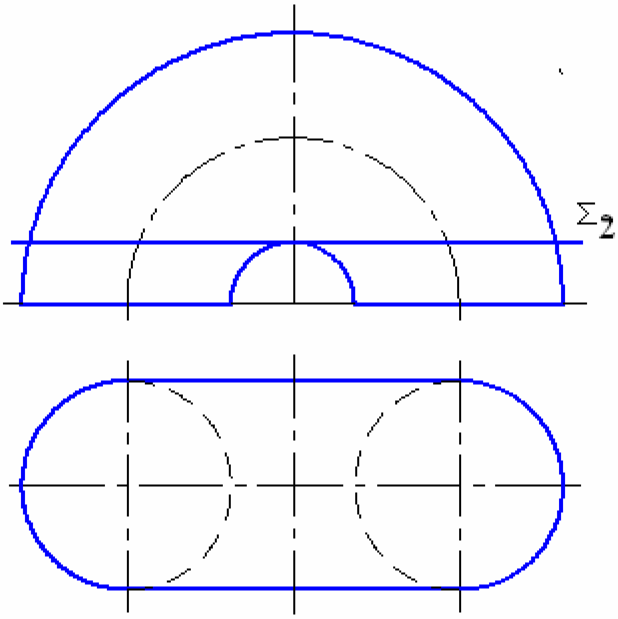
35



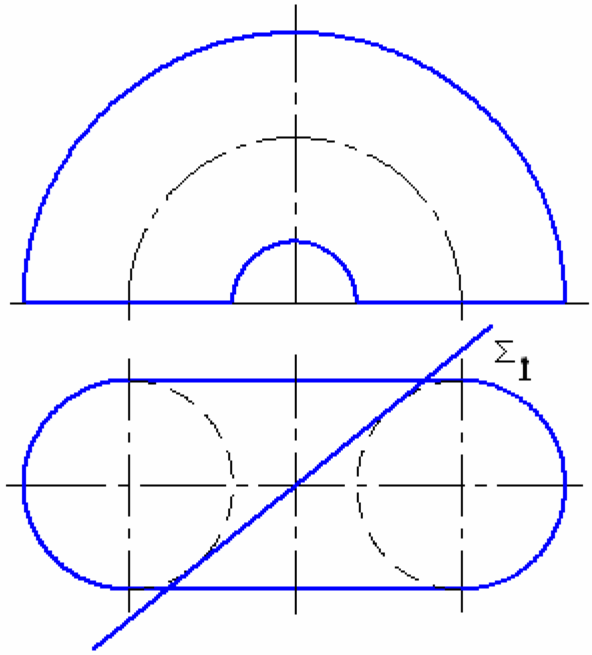
36



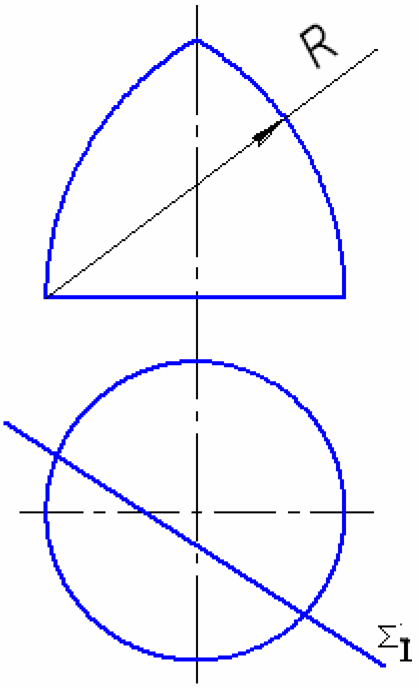
37



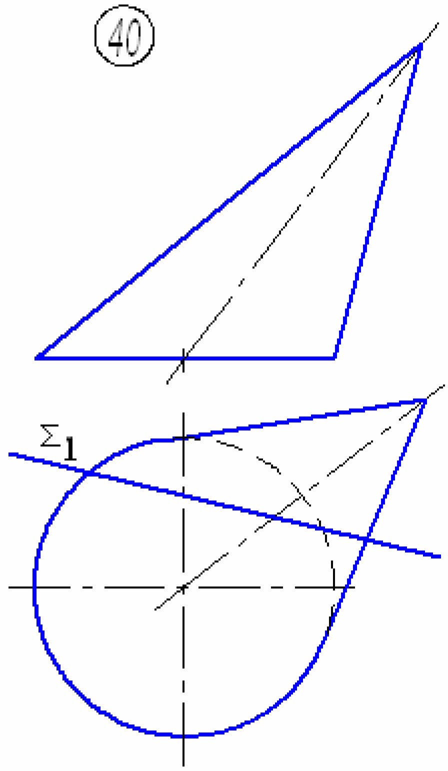
38

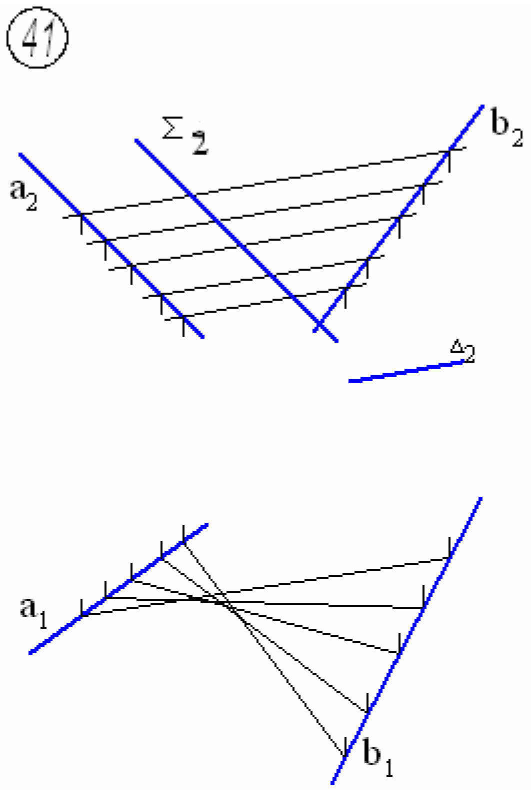


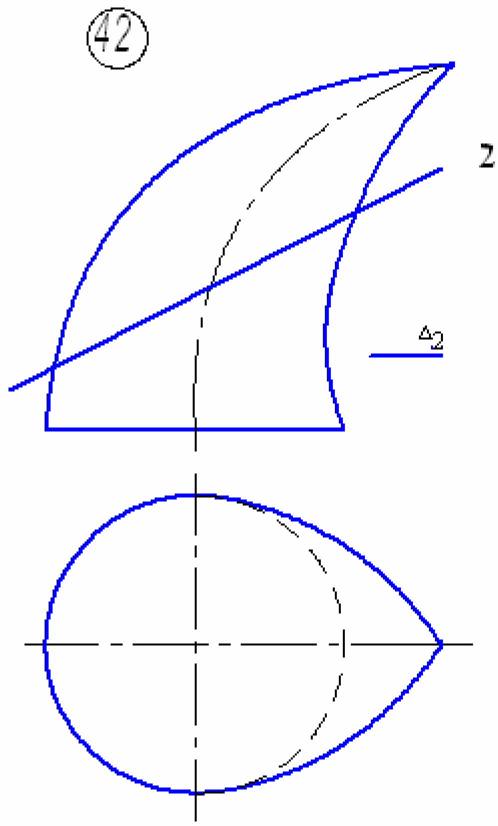
39

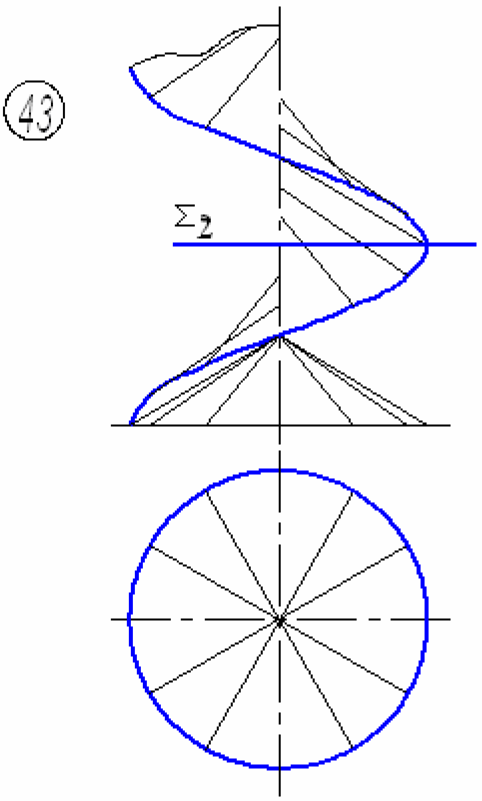


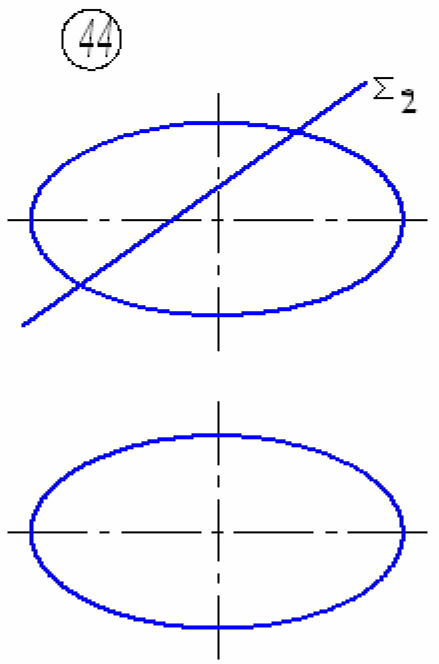
40




41
a2
Σ 2
b2
Δ2
a1
b1


42
2
Δ2

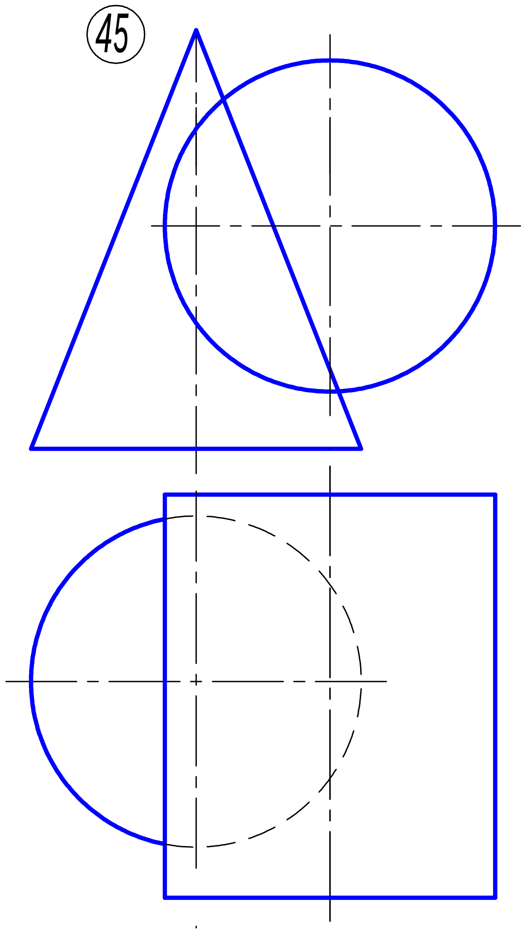

43
Σ2


44
Σ 2

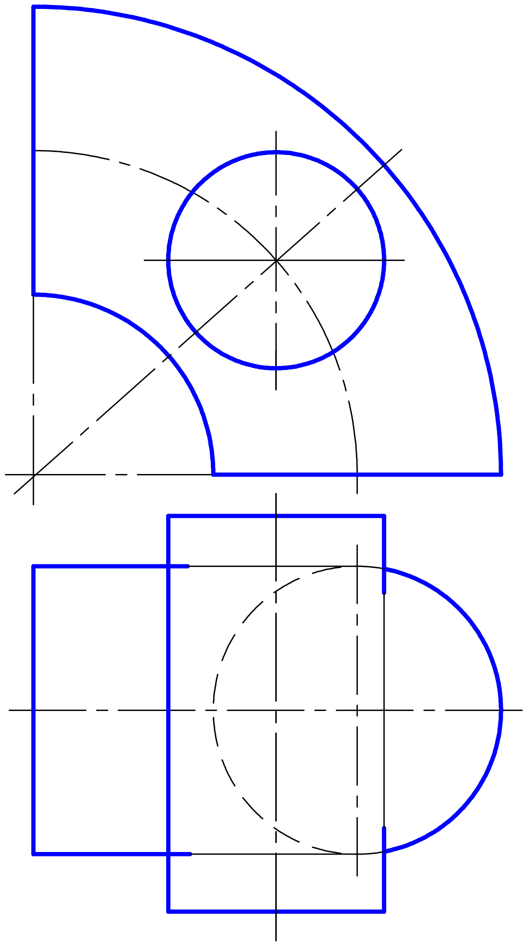
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Построить линии пересечения поверхностей, указать видимость (задачи 45-61)

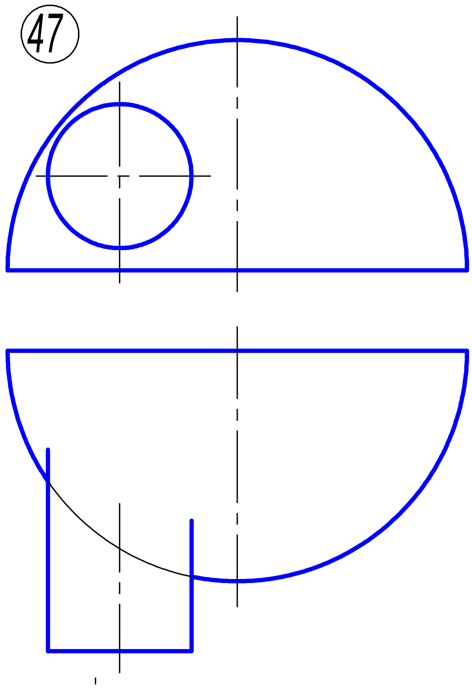
45



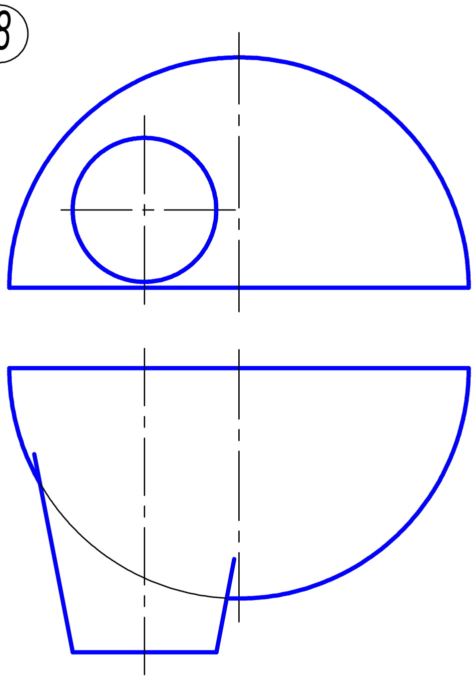
46



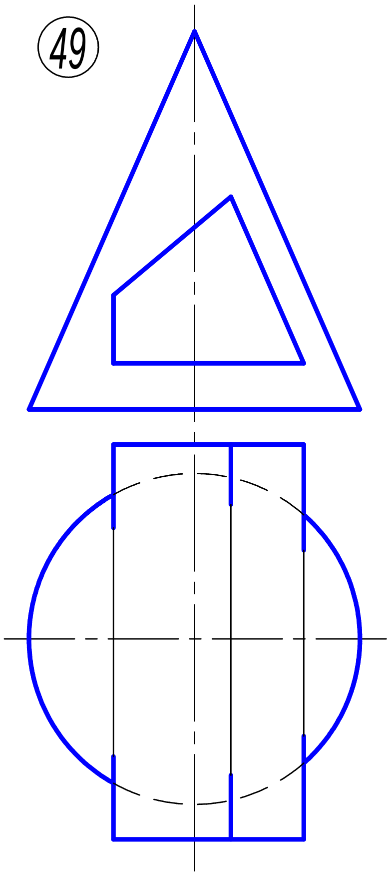
47



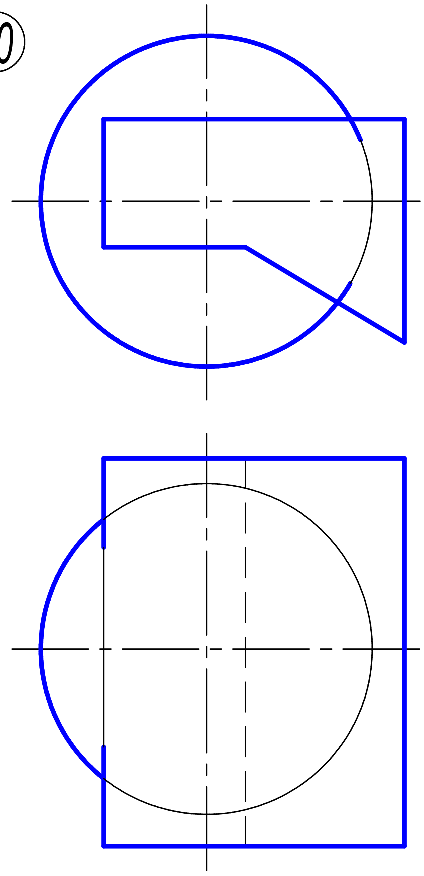
48



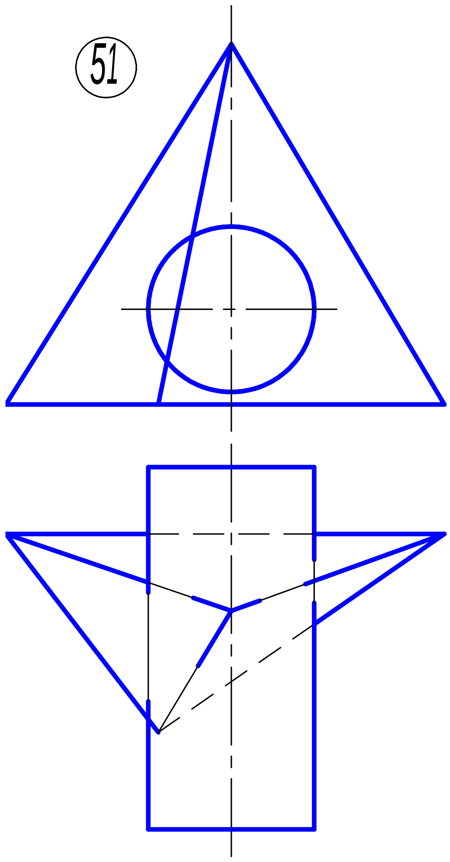
49



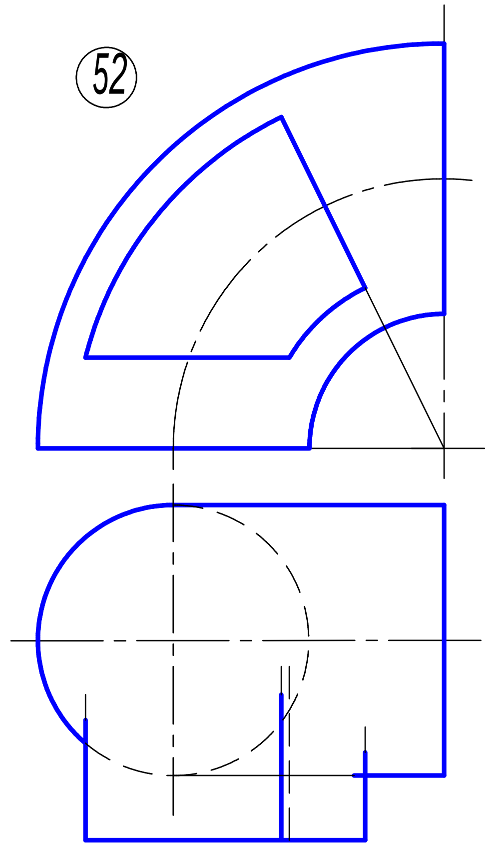
50



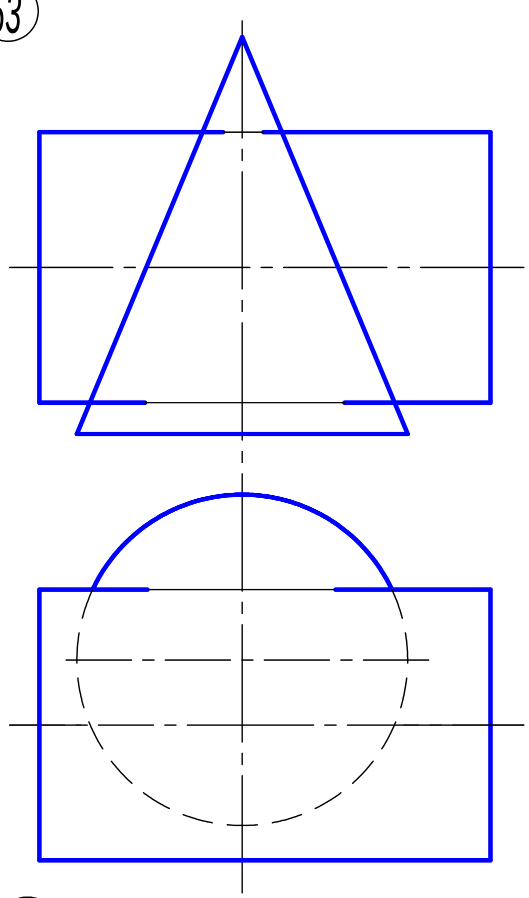
51



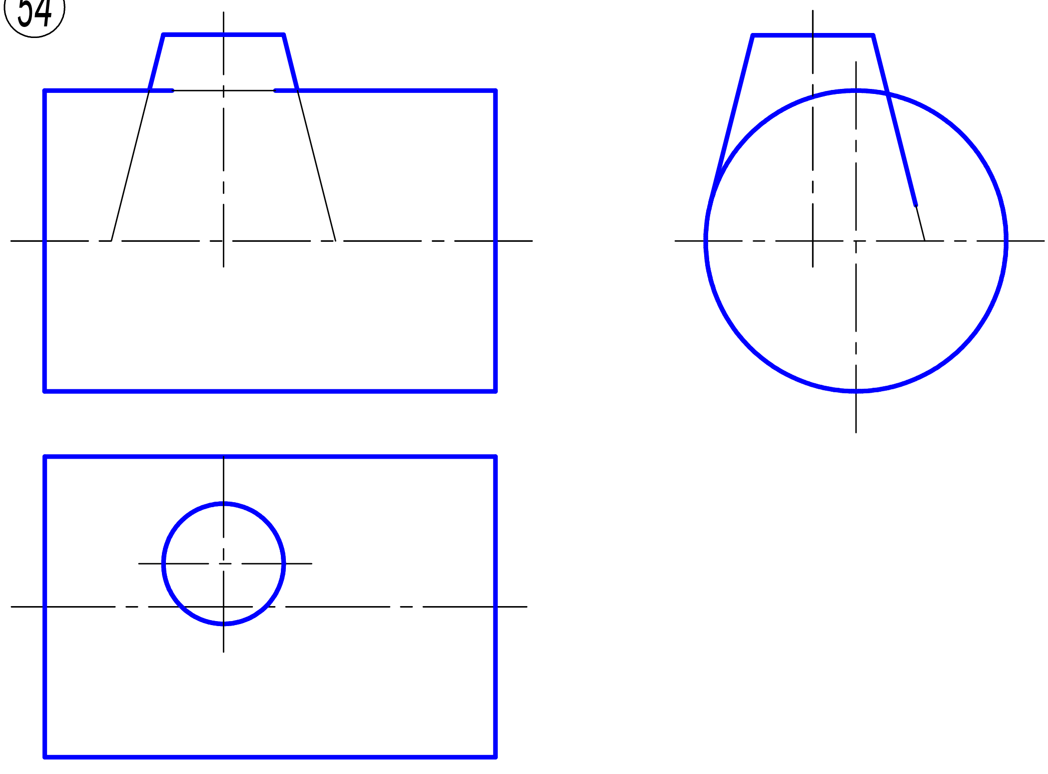
52



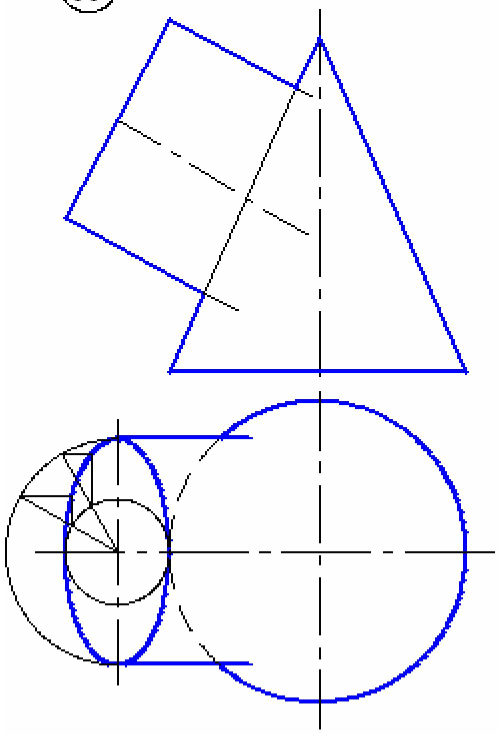
53



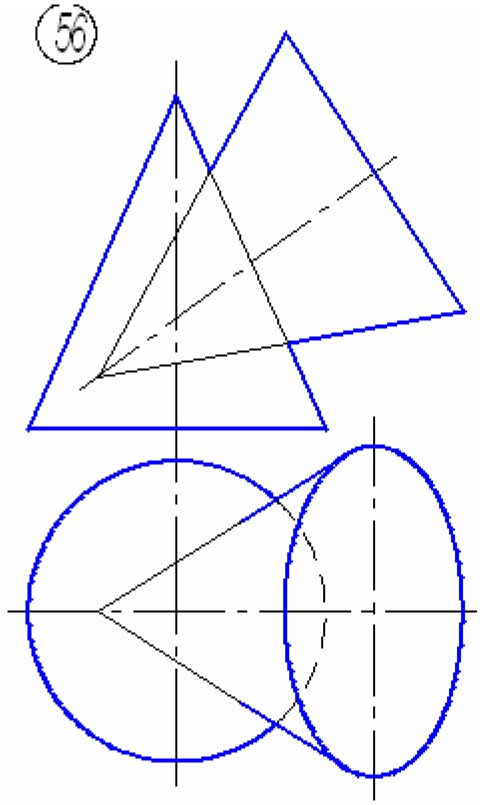
54



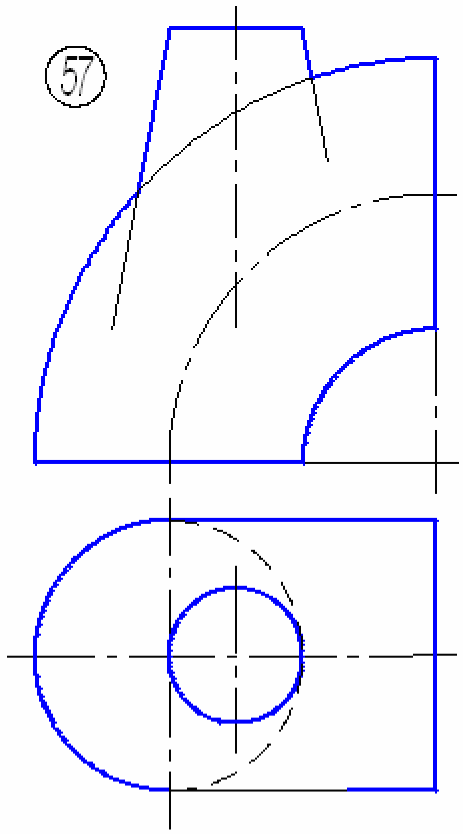
55



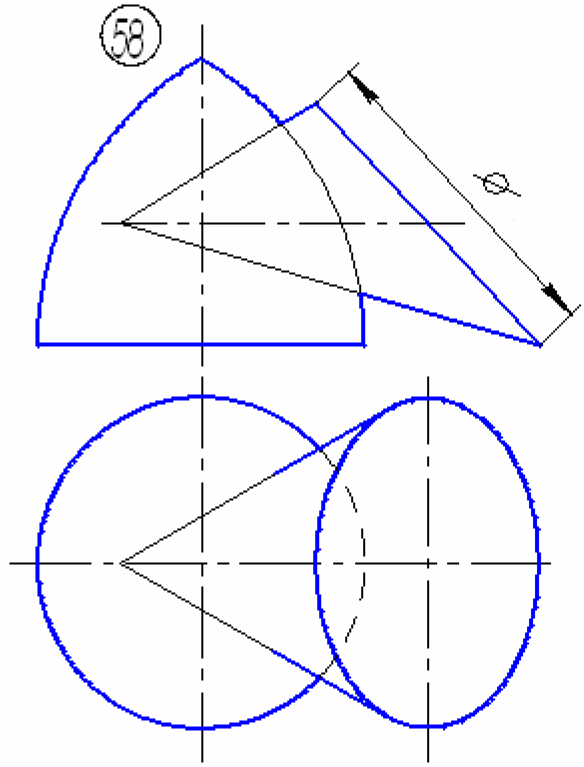
56



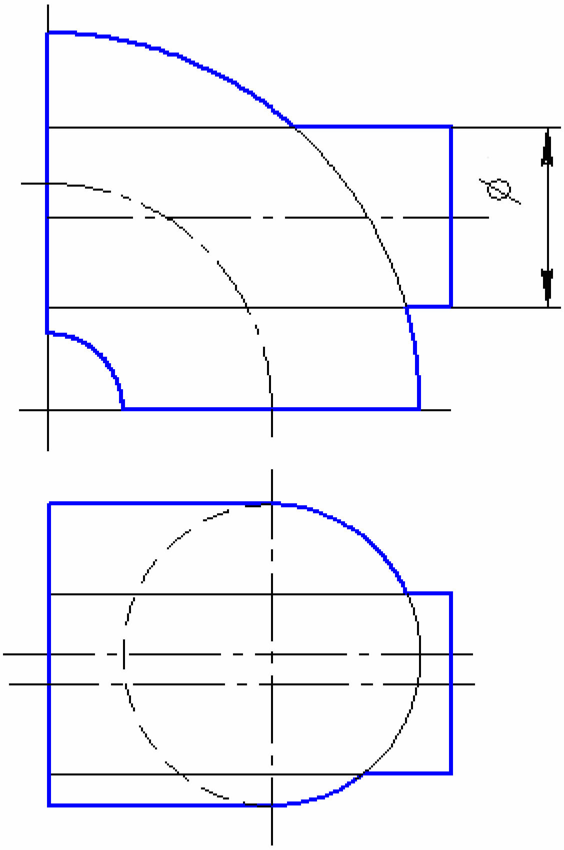
57



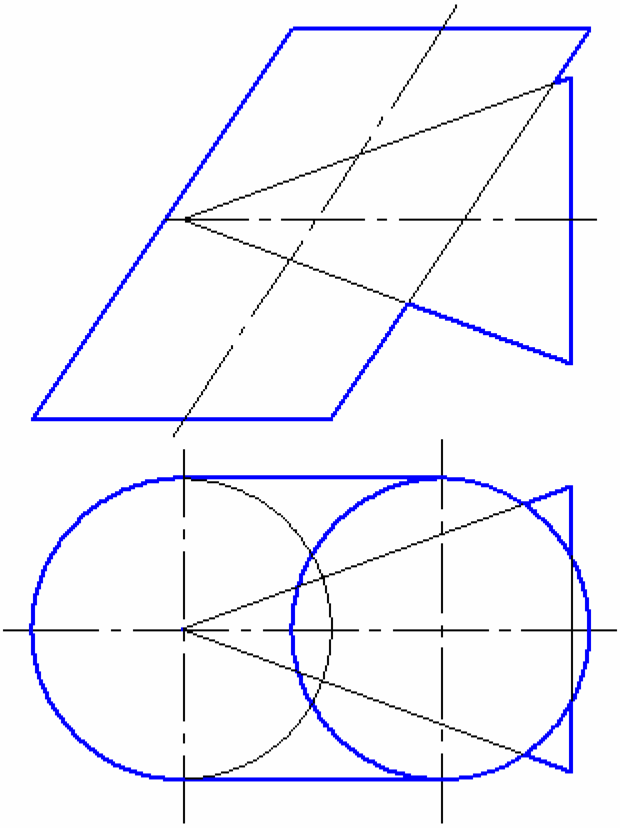
58



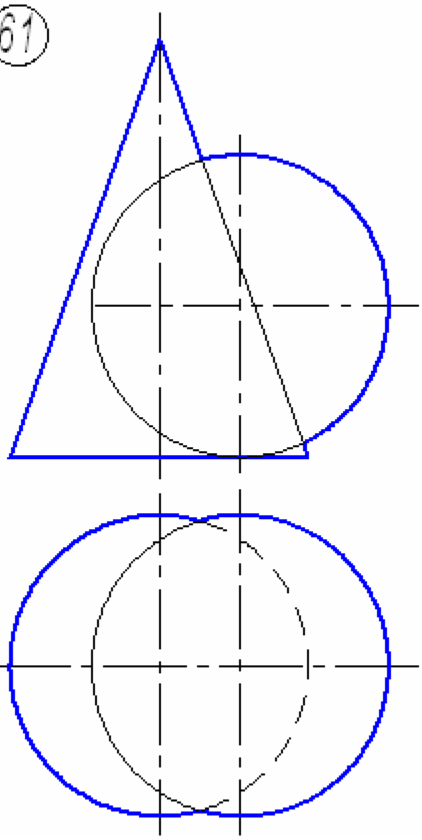
59



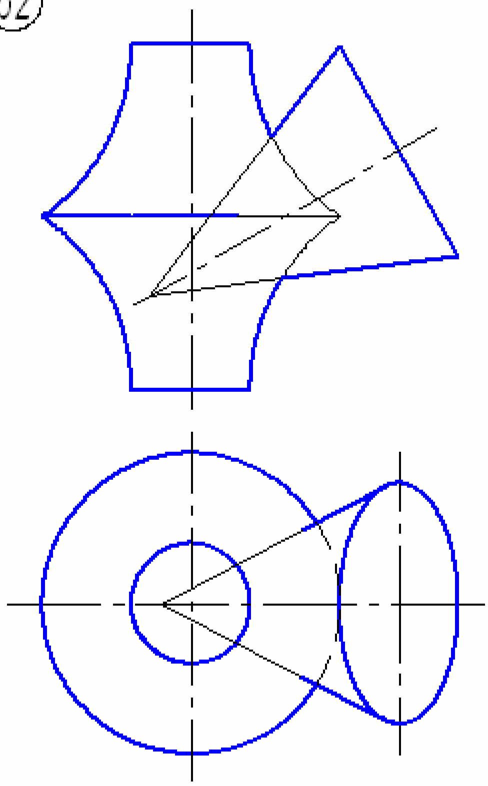
60



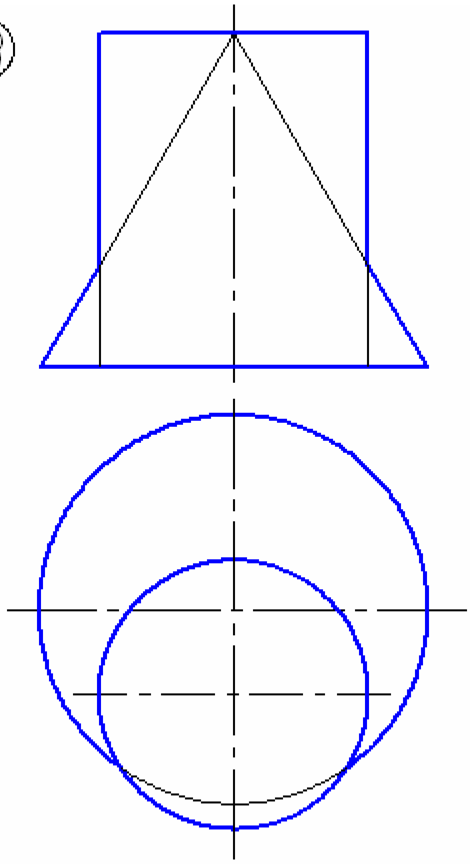
61



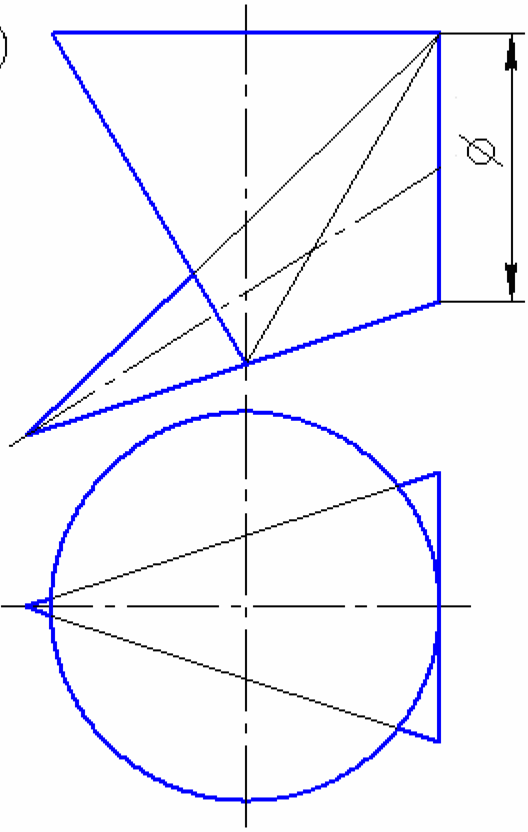
62



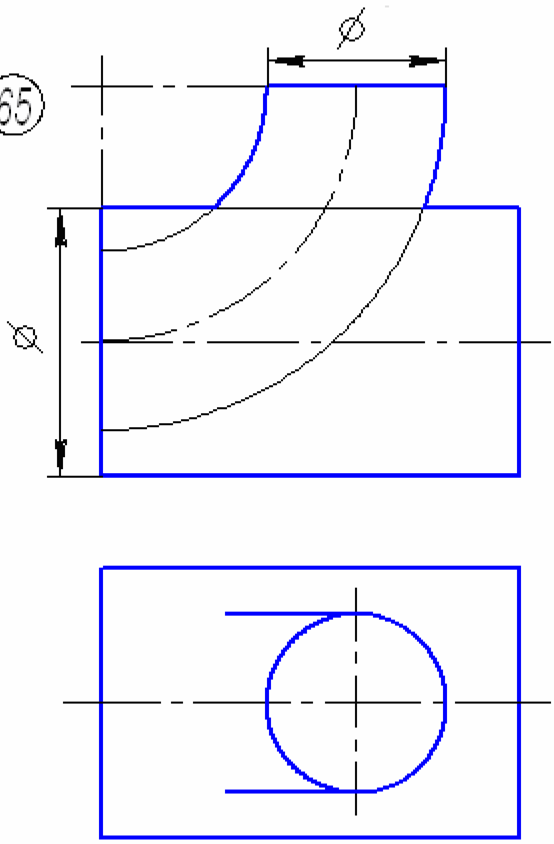
63



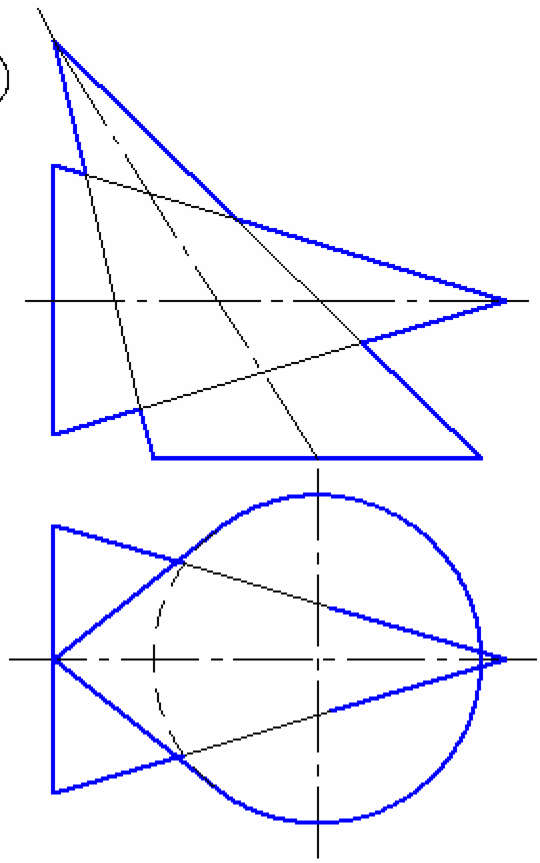
64



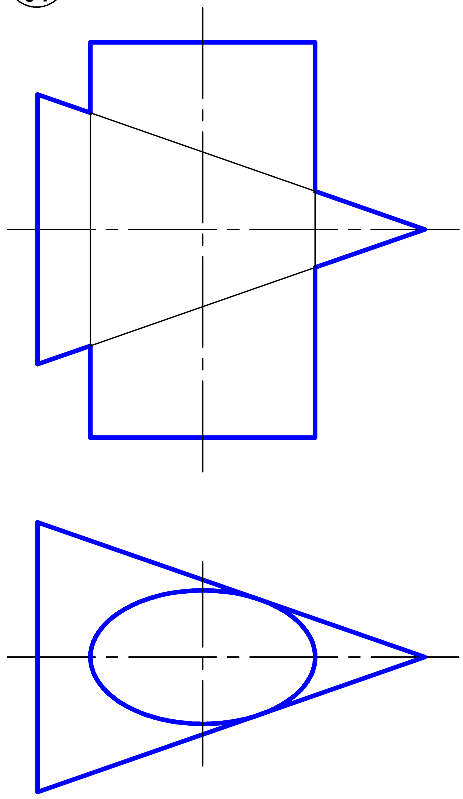
65



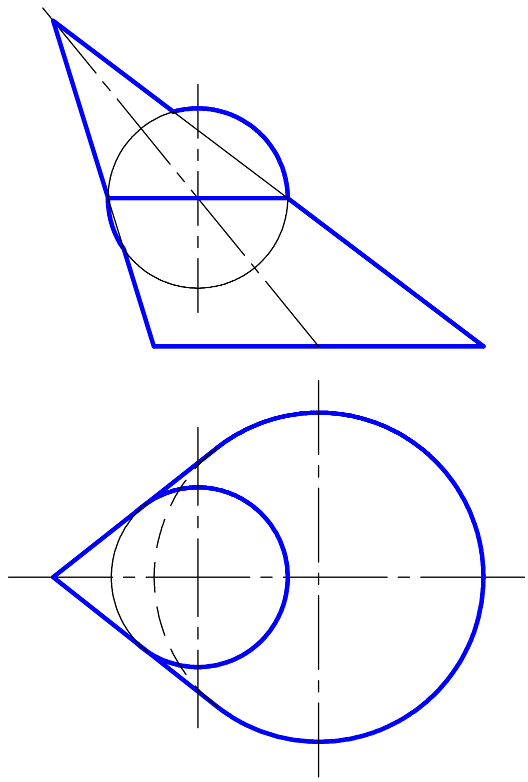
66



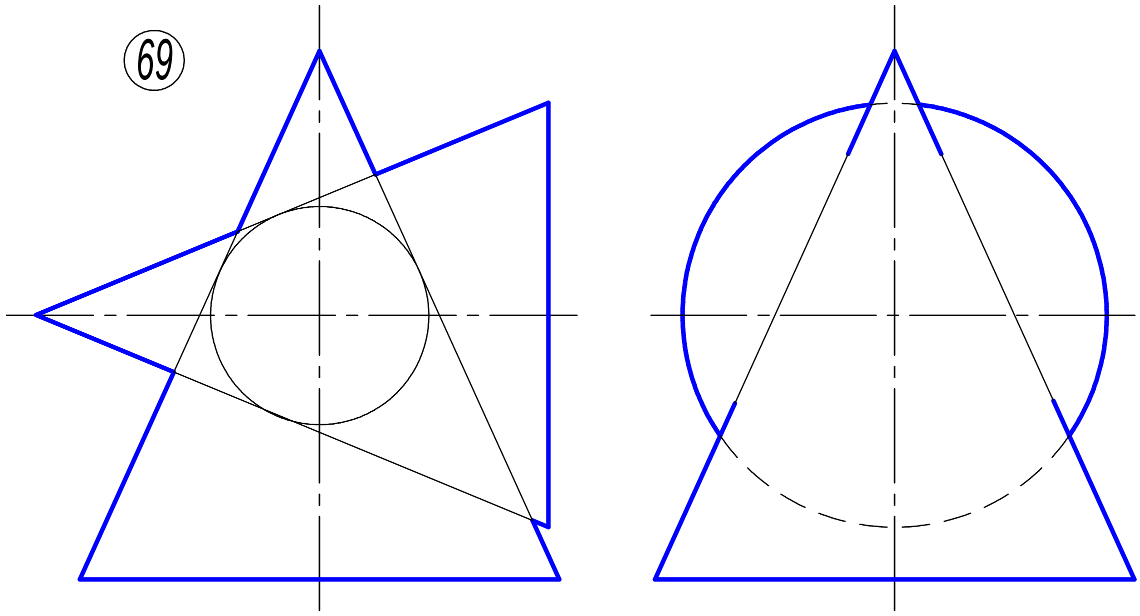
67



68



69



Оглавление

Редактор О.В. Есаулов
Компьютерная верстка Т.А. Бурдель

ИД № 06039 от 12.10.2001 г.

Сводный темплан 2008г.

Подписано в печать 10.01.2008. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Уч. изд.л. 2,5. Усл.-печ. л. 2,5.
Тираж 300 экз. Заказ 90.

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира, 11
Типография ОмГТУ